



# Esquema de Álgebra

## 1. Sistemas de ecuaciones lineales

- 1.1. Teorema de Rouché-Frobenius
- 1.2. Métodos de resolución
  - 1.2.1. Resolución por sustitución
  - 1.2.2. Resolución por la regla de Cramer
  - 1.2.3. Resolución por el método de Gauss
  - 1.2.4. Resolución matricial
  - 1.2.5. Métodos iterativos
- 1.3. Sistemas compatibles indeterminados
- 1.4. Sistemas homogéneos

## 2. Cálculo matricial

- 2.1. Transposición matricial
- 2.2. Matriz simétrica
- 2.3. Determinante de una matriz cuadrada
- 2.4. Rango de una matriz
- 2.5. Matrices semejantes
- 2.6. Matriz inversa (de una matriz cuadrada)
- 2.7. Autovalores y autovectores de una matriz
- 2.8. Diagonalización de una matriz cuadrada

## 3. Espacios vectoriales

- 3.1. Combinación lineal
- 3.2. Independencia lineal
- 3.3. Sistema generador
- 3.4. Base: Sistema linealmente independiente y generador
- 3.5. Dimensión: Número de elementos de las bases
- 3.6. Cambio de base
- 3.7. Subespacio vectorial

## 4. Aplicaciones lineales

- 4.1. Definición
- 4.2. Estructura de espacio vectorial
- 4.3. Tipos de aplicaciones: inyectivas, suprayectivas y biyectivas
- 4.4. Núcleo
- 4.5. Imagen
- 4.6. Propiedades
- 4.7. Expresión matricial

## 5. Formas cuadráticas reales

- 5.1. Definición de forma cuadrática real
- 5.2. Su matriz es simétrica
- 5.3. Clasificación de las formas cuadráticas
- 5.4. Expresiones diagonales. Ley de inercia
- 5.5. Relación con las formas bilineales simétricas
- 5.6. Estudio del signo de una forma cuadrática

# 1. Sistemas de ecuaciones lineales

## 1.1. Teorema de Rouché-Frobenius

## 1.2. Métodos de resolución

### 1.2.1. Resolución por sustitución

### 1.2.2. Resolución por la regla de Cramer

### 1.2.3. Resolución por el método de Gauss

### 1.2.4. Resolución matricial

### 1.2.5. Métodos iterativos

## 1.3. Sistemas compatibles indeterminados

## 1.4. Sistemas homogéneos



# 2. Cálculo matricial

## 2.1. Transposición matricial

### Propiedades

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(A^n)^t = (A^t)^n$

## 2.2. Matriz simétrica: $A^t = A$

## 2.3. Determinante de una matriz cuadrada

### Propiedades

- $|A| = |A^t|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- Si se intercambian entre sí dos filas o columnas el determinante queda cambiado de signo
- El producto de un número por un determinante es igual a multiplicar por el número los elementos de una sola fila o columna, da igual cuál
- El determinante vale 0 si todos los elementos de una fila o columna son nulos
- El determinante vale 0 si hay dos filas o columnas iguales
- El determinante vale 0 si una fila o columna es combinación lineal de las demás
- El determinante no varía si una fila o columna se sustituye por ella misma más una combinación lineal de las demás
- El determinante de una matriz triangular o diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

#### Cálculo

- Con reglas para los de orden uno, dos y tres (aunque también se podrían aplicar los métodos siguientes).
- Desarrollándolo por la fila o columna que se desee o interese
- Utilizando las propiedades para ir obteniendo matrices más sencillas (con muchos ceros en alguna fila o columna), y luego desarrollándolo por la fila o columna que interese

#### 2.4. Rango de una matriz

- Orden del determinante (no nulo) de la submatriz más grande posible
- Número de filas/columnas que, vistas como vectores, son linealmente independientes

#### 2.5. Matrices semejantes

##### Operaciones elementales entre filas (o entre columnas, respectivamente)

- Intercambiar dos filas entre sí
- Multiplicar una fila por un escalar no nulo
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras filas

##### Propiedades de semejanza

- $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$
- $|A| = |B|$
- $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$
- $A^n$  y  $B^n$  también son semejantes

#### 2.6. Matriz inversa (de una matriz cuadrada)

##### Condición de existencia

$$A^{-1} \text{ existe si } |A| \neq 0$$

##### Cálculo

- Fórmula:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^t$ , donde  $C = \left( (-1)^{i+j} |A_{ij}| \right)_{ij}$ . El factor  $(-1)^{i+j}$  determina el

signo, que va alternando, y  $A_{ij}$  es la matriz que queda de suprimir en  $A$  la fila  $i$ -ésima y la columna  $j$ -ésima. (Eficaz sólo para matrices de orden bajo.)

- Método de Gauss: Se escribe la matriz  $(A:I_n)$  y se hacen operaciones elementales por filas hasta que se obtiene una matriz equivalente  $(I_n:B)$ . Entonces se tiene que  $A^{-1}=B$ . (Eficaz tanto para matrices de orden bajo como alto.)

### Propiedades

- Cuando existe, la matriz inversa es única
- $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

### 2.7. Autovalores y autovectores de una matriz

Los autovalores se calculan resolviendo  $|A - \lambda I_n| = 0$

Los autovectores se calculan resolviendo, para cada autovalor,  $(A - \lambda I_n) \cdot X = 0$

### 2.8. Diagonalización de una matriz cuadrada

Una matriz es diagonalizable (existe una matriz diagonal semejante) si existe una base de autovectores

Toda matriz simétrica es diagonalizable



## 3. Espacios vectoriales

3.1. Combinación lineal:  $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i$

3.2. Independencia lineal:  $\vec{0} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i \rightarrow \alpha_i = 0$

### Comprobación

- Para comprobar si un conjunto de vectores dados son independientes o no, se puede aplicar la definición anterior, que lleva a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son  $\alpha_i$ .
- Otro método, a veces más rápido, es colocar los vectores como filas (o columnas) de una matriz y estudiar su rango, que informa de cuántos son independientes

3.3. Sistema generador:  $\forall \vec{v} \in E \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i$

3.4. Base: Sistema linealmente independiente y generador

3.5. Dimensión: Número de elementos de las bases

3.6. Cambio de base

Cálculo de la matriz de cambio de base

Sean dos bases  $B_1$  y  $B_2$ , la matriz  $A$  tiene como columnas las componentes de los elementos de  $B_2$  en función de los elementos de  $B_1$

Aplicación

Por su construcción, la matriz  $A$  «transforma» la información expresada en función de  $B_2$  en la misma información expresada en función de  $B_1$ ; es decir, si un vector se escribe como  $X_1$  en la base 1 y como  $X_2$  en la base 2, entonces

$$X_1 = A X_2$$

Análogamente, si se conoce  $X_1$  se puede obtener  $X_2$  haciendo

$$A^{-1} X_1 = X_2$$

3.7. Subespacio vectorial

Condición necesaria y suficiente:  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in E \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E$

Subespacio generado (variedad lineal):  $L(S) = \{\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n\}$



## 4. Aplicaciones lineales

4.1. Definición

$$f(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \quad (\text{o en dos condiciones})$$

4.2. Estructura de espacio vectorial

4.3. Tipos de aplicaciones: inyectivas, suprayectivas y biyectivas

4.4. Núcleo

Subespacio vectorial del espacio origen formado por los vectores cuya imagen es el elemento

nulo. Para calcularlo, se iguala a cero la imagen de un vector general y se resuelve el sistema:

$$f(\vec{v}) = \vec{0}$$

#### 4.5. Imagen

Subespacio de los vectores que son imagen de algún vector del espacio inicial

$$\vec{w} = f(\vec{v})$$

La imagen de una base del espacio inicial contiene una base de este subespacio, por lo que basta quedarse con el mayor número de vectores que sean linealmente independientes (seguirán siendo generadores). Una vez que se tiene una base del subespacio *imagen*, se conoce el subespacio y su dimensión.

#### 4.6. Propiedades

- $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$
- Las imágenes de un sistema de vectores l.d. son l.d.
- Si  $f$  es inyectiva, las imágenes de un sistema l.i. son l.i.
- Si  $f$  es suprayectiva, las imágenes de un sistema generador son un sistema generador
- Si  $f$  es biyectiva, las imágenes de una base son una base
- $U$  y  $V$  son espacios vectoriales isomorfos si  $\dim(U) = \dim(V)$

#### 4.7. Expresión matricial

$$f(X) = M \cdot X$$

Cálculo de la matriz

Sean dos bases  $B_1$  y  $B_2$ , de los espacios de partida y llegada, respectivamente, entonces la matriz  $M$  tiene como columnas las componentes de los elementos  $f(B_1)$  en función de los elementos de  $B_2$ .

Cambio de base

Cálculo de la matriz de cambio de base: Sean dos bases  $B_1$  y  $B_2$  y la matriz  $M$  como en el apartado anterior; sean ahora otras dos bases  $B'_1$  y  $B'_2$ , de los espacios de partida y llegada, respectivamente, entonces ahora la matriz  $M'$  se relaciona con las tres matrices anteriores como

$$M' = D^{-1} M C,$$

donde  $D$  es la matriz de cambio de  $B_1$  y  $B'_1$ , y  $C$  es la matriz de cambio de  $B_2$  y  $B'_2$ . Análogamente, si se conoce  $M'$  se puede obtener  $M$  haciendo

$$M = D M' C^{-1}.$$



## 5. Formas cuadráticas reales

### 5.1. Definición de forma cuadrática real

### 5.2. Su matriz es simétrica

### 5.3. Clasificación de las formas cuadráticas

### 5.4. Expresiones diagonales. Ley de inercia

### 5.5. Relación con las formas bilineales simétricas

### 5.6. Estudio del signo de una forma cuadrática $Q(\mathbf{x})$

Aplicando la definición (casi nunca se puede aplicar, a no ser que la expresión polinómica lo indique):

- $Q(\mathbf{x})$  es definida positiva si  $Q(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si  $Q(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $Q(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $Q(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa si  $Q(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- $Q(\mathbf{x})$  es indefinida si para unos valores de  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  se tiene que  $Q(\mathbf{x}) > 0$  y para otros  $Q(\mathbf{x}) < 0$

Método basado en los elementos de la diagonal de la matriz,  $a_{ii}$ , si es diagonal, o en los mismos elementos diagonales de la matriz diagonal semejante (siempre existe, por ser la matriz simétrica)

- $Q(\mathbf{x})$  es definida positiva si  $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si  $a_{ii} > 0$  con algún  $a_{ii} = 0$
- $Q(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $a_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa si  $a_{ii} < 0$  con algún  $a_{ii} = 0$
- $Q(\mathbf{x})$  es indefinida si para unos valores  $a_{ii} \geq 0$  y para otros  $a_{ii} \leq 0$

Método basado en los menores principales,  $|A_i| = |(a_{jj})_{ixi}|$

- $Q(\mathbf{x})$  es definida positiva si  $|A_i| > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida positiva si  $|A_i| > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$  y  $|A_n| = 0$
- $Q(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $|A_1| < 0$ ,  $|A_2| > 0$ ,  $|A_3| < 0$  ...
- $Q(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa si  $|A_1| < 0$ ,  $|A_2| > 0$ ,  $|A_3| < 0$  ... y  $|A_n| = 0$
- $Q(\mathbf{x})$  es indefinida si:
  - a)  $|A_n| \neq 0$  y no es definida
  - ó
  - b)  $|A_n| = 0$ ,  $|A_i| \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$  y no es semidefinida





Universidad Complutense de Madrid

└ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

└ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II

└ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012