Infinitésimos e Infinitos

Se dice que las funciones $f(x)$ y $h(x)$ son *infinitésimos* e *infinitos equivalentes* si se verifica que

$$lím_{x\to x_o}\frac{f(x)}{h(x)}=1.$$

Esto implica que si x está en un entorno del punto x_o se cumple que $f(x)\approx h(x)$. Por tanto, muchas operaciones locales quedan simplificadas cuando se sustituye una función por otra. En este documento se estudia el caso en que estas sustituciones se utilizan para resolver límites.

Nota: No se ha hecho hincapié en la definición anterior, pero las funciones *f(x)* y *g(x)* deben ser continuas en un entorno del punto x_0; por otro lado, para considerar límites no es necesario que existan $f(x_0)$ y $g(x_0)$.

Infinitésimos

Algunos de los infinitésimos más utilizados son los siguientes:

Sustituciones cuando una variable o función toma valores cercanos a *0*

(1) Cuando $x\approx 0$, se tienen las siguientes aproximaciones:

(a) $sen(x)\approx x$

(b) $tg(x)\approx x$

(c) $arcsen(x)\approx x$

(d) $arctg(x)\approx x$

(e) $e^x\approx 1+x$

(f) $\cos(x)\approx 1-\frac{x^2}{2}$

(g) $\ln(1+x)\approx x$

(h) $\frac{1+x}{x}\approx\frac{1}{x}$

(i) $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$

(j) $\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$, $\quad a>0$

(k) $(1+x)^k\approx 1+kx$, $\quad k\in\mathbb{N}$

(l) $a_k x^{-k}+a_{k-1}x^{-(k-1)}+\cdots+a_0\approx a_k x^{-k}$, $\quad k\in\mathbb{N}$

Nota: Muchas de estas equivalencias pueden demostrarse fácilmente con la regla de L'Hôpital

Nota: Con estas sustituciones, las funciones quedan escritas en función de polinomios

(2) Los infinitésimos del primer punto también son ciertos para funciones más generales. Cuando $f(x)\approx 0$, sea en el entorno $x\approx 0$ o en otro $x\approx x_0$,

$$sen(f(x))\approx f(x)$$
$$\vdots$$

Como casos particulares interesantes se obtienen:

(2.1) Cuando $x\approx 0$ se puede considerar $f(x)=-x$, con lo que se obtienen los infinitésimos de la lista con $-x$ en vez de con x

$$sen(-x)\approx -x \quad \cdots$$

(2.2) Más generalmente, cuando $g(x)\approx 0$, sea en el entorno $x\approx 0$ o en otro entorno $x\approx x_0$, se puede considerar $f(x)=-g(x)\approx 0$, por lo que

$$sen(-g(x))\approx -g(x) \quad \cdots$$

(2.3) Sustituciones cuando una variable toma valores cercanos a *c* Cuando $x\approx c$, se pueden considerar $f(x)=x-c\approx 0$ ó $f(x)=c-x\approx 0$, lo que llevaría a la listas

$$sen(x-c)\approx x-c \quad \cdots$$

y

$$sen(c-x)\approx c-x \quad \cdots$$

Suele utilizarse mucho el caso $c=1$. En este caso, es útil hacer un *cambio de variable* en el límite; por ejemplo, haciendo ahora el cambio $x-1=y$,

$$lím_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x}=lím_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{1-y-1}=lím_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1$$

(2.4) Sustituciones cuando una función toma valores cercanos a *c* Más generalmente, cuando $g(x)\approx c$, sea en el entorno $x\approx 0$ o en otro entorno $x\approx x_0$, se puede considerar $f(x)=g(x)-c\approx 0$ ó $f(x)=c-g(x)\approx 0$, por lo que se obtienen

$$sen(g(x)-c)\approx g(x)-c \quad \cdots$$

y

$$sen(c-g(x))\approx c-g(x) \quad \cdots$$

Infinitésimos basados en la fórmula de Taylor

(3) Sustituciones cuando una variable toma valores cercanos a *0* Cuando $x\approx 0$, si existe la fórmula de Taylor de $f(t)$ en $t=0$, y $f'(0)\neq 0$ se puede hacer la sustitución

$$f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x$$

puesto que

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots,$$

y se cumple que

$$lím_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x}=1+lím_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots}{f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x}=1$$

Nota: De nuevo, cuando una nueva función $g(x)\approx 0$, en la anterior sustitución podría sustituirse x por $g(x)$, para obtener

$$f(g(x))\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}g(x)$$

Nota: Si $f'(0)=0$ se considera, en la fórmula de Taylor, hasta el primer monomio con coeficiente no nulo

(4) <u>Sustituciones cuando una variable toma valores cercanos a *0*</u> Cuando $x\approx 0$, si $f(t)$ tiene desarrollo de Taylor en $t\approx c$, y $f'(c)\neq 0$ se puede utilizar la sustitución

$$f(x+c)\approx f(c)+\frac{f'(c)}{1!}x$$

porque $x+c\approx c$

Nota: Cuando una nueva función $g(x)\approx 0$, en la anterior sustitución podría sustituirse x por $g(x)$, para obtener

$$f(g(x)+c)\approx f(c)+\frac{f'(c)}{1!}g(x)$$

Nota: Si $f'(c)=0$ se considera, en la fórmula de Taylor, hasta el primer monomio con coeficiente no nulo

(5) <u>Sustituciones cuando una variable toma valores cercanos a *c*</u> Cuando $x\approx c$, si existe la fórmula de Taylor de $f(t)$ en $t=0$, y $f'(0)\neq 0$ se puede hacer la sustitución

$$f(x-c)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-c)$$

porque $x-c\approx 0$

Nota: Cuando una nueva función $g(x)\approx c$, en la anterior sustitución podría sustituirse x por $g(x)$, para obtener

$$f(g(x)-c)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(g(x)-c)$$

Nota: Si $f'(0)=0$ se considera, en la fórmula de Taylor, hasta el primer monomio con coeficiente no nulo

(6) <u>Sustituciones cuando una variable toma valores cercanos a *c*</u> Cuando $x\approx c$, si $f(t)$ tiene desarrollo de Taylor en $t\approx c$, y $f'(c)\neq 0$ se puede utilizar la sustitución

$$f(x)\approx f(c)+\frac{f'(c)}{1!}(x-c)$$

Nota: Cuando una nueva función $g(x)\approx c$, en la anterior sustitución podría sustituirse x por $g(x)$, para obtener

$$f(g(x)) \approx f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(g(x) - c)$$

Nota: Si $f'(c) = 0$ se considera, en la fórmula de Taylor, hasta el primer monomio con coeficiente no nulo

Infinitos

(7) Sustituciones cuando una variable o función tiende a infinito: Cuando $x \to \infty$, se puede pensar en una variable $y = x^{-1}$, que cumpliría $y \approx 0$, por lo que todo lo dicho para infinitésimos sería cierto al sustituir x por $\frac{1}{x}$; esto llevaría a las listas, cuando $x \to \infty$,

$$sen\left(\frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x} \qquad \cdots$$

$$sen\left(-\frac{1}{x}\right) \approx -\frac{1}{x} \qquad \cdots$$

Del mismo modo, para una función $f(x) \to \infty$ se cumpliría lo dicho para los infinitésimos de $f(x) \approx 0$ sin más que sustituir $f(x)$ por $\frac{1}{f(x)}$; esto llevaría a las listas, cuando $f(x) \to \infty$,

$$sen\left(\frac{1}{f(x)}\right) \approx \frac{1}{f(x)} \qquad \cdots$$

$$sen\left(-\frac{1}{f(x)}\right) \approx -\frac{1}{f(x)} \qquad \cdots$$

Para **polinomios**, la sustitución $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0 \approx a_k x^k$, $\quad k \in \mathbb{N}$ es muy utilizada. Al hacerlo, o bien se alude a ella directamente o se repiten los siguientes cálculos (para el límite concreto que se esté calculando):

$$lím_{x\to\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0}{a_k x^k} = lím_{x\to\infty} \frac{\frac{a_k x^k}{x^k} + \frac{a_{k-1} x^{k-1}}{x^k} + \cdots + \frac{a_0}{x^k}}{\frac{a_k x^k}{x^k}} = lím_{x\to\infty} \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^k}}{a_k} = 1$$

(8) Sustituciones cuando una variable o función tiende a infinito: Para los infinitésimos basados en la fórmula de Taylor, es posible hacer lo que se ha hecho en el apartado anterior. Para las aproximaciones del apartado (3) y su nota, y del apartado (4) y su nota, sería posible hacer, respectivamente,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{x}, \qquad f\left(\frac{1}{g(x)}\right) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\frac{1}{g(x)}$$

$$f\left(\frac{1}{x} + c\right) \approx f(c) + \frac{f'(c)}{1!}\frac{1}{x}, \qquad f\left(\frac{1}{g(x)} + c\right) \approx f(c) + \frac{f'(c)}{1!}\frac{1}{g(x)}$$

Ejemplos

En algunos casos hay que tener cuidado al hacer varias sustituciones de infinitésimos a la vez. Por ejemplo, cuando $x \approx 0$ el hecho de que se cumplan $sen(x) \approx x$ y $tg(x) \approx x$ implica la aproximación $sen(x) - tg(x) \approx 0$, pero esto no es lo que se obtendría después de hacer las dos sustituciones, a saber, $x - x = 0$, porque entonces se estaría sustituyendo algo que es <u>aproximadamente</u> cero por algo que es <u>exactamente</u> cero, lo que en algunos casos puede introducir falsedades y dar problemas (véanse los ejemplos b.1 y d.1). A veces es necesario hacer cálculos y operaciones antes de sustituir los infinitésimos. Otras veces es necesario utilizar más términos en infinitésimos basados en la fórmula de Taylor, puesto que el primero no es suficiente para discriminar el comportamiento de dos funciones tan parecidas.

Ejemplo a.1

$$lím_{x \to 0} \frac{sen(3x)\, sen(5x)}{(x - x^3)^2} = lím_{x \to 0} \frac{3x\, 5x}{(x - x^3)^2} = lím_{x \to 0} \frac{15x^2}{x^2 (1 - x^2)^2} = lím_{x \to 0} \frac{15}{(1 - x^2)^2} = 15$$

Nota: Resolver este límite por la regla de L'Hôpital es muy engorroso, porque hay que derivar productos

Ejemplo a.2

$$lím_{x \to 0} \frac{arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)}{\ln(1 - x)} = lím_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{-x} = lím_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = -1$$

Nota: Resolver este límite por la regla de L'Hôpital es también engorroso

Ejemplo a.3

$$lím_{x \to 0} \frac{x - sen(2x)}{x + sen(3x)} = lím_{x \to 0} \frac{x - 2x}{x + 3x} = lím_{x \to 0} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

Nota: Este límite se resuelve fácilmente por la regla de L'Hôpital

Ejemplo a.4

$$lím_{x \to 0} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2} = lím_{x \to 0} \frac{1 - \frac{(mx)^2}{2} - 1 + \frac{(nx)^2}{2}}{x^2} = -\frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{2}$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital dos veces seguidas

Ejemplo a.5

$$lím_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1}{\frac{1}{2\mathrm{x}^3}}=lím_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{2\mathrm{x}^3}}=-2$$

No obstante, quizá es más fácil resolver este límite sin utilizar infinitésimos, sino haciendo

$$lím_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1}{\frac{1}{2\mathrm{x}^3}}=lím_{x\to 0}\frac{x^3\left(-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^3\frac{1}{2\mathrm{x}^3}}=lím_{x\to 0}\frac{-1+2\mathrm{x}-x^3}{\frac{1}{2}}=-2$$

Ejemplo b.1

En el siguiente límite aparecen problemas cuando se sustituyen dos infinitésimos a la vez:

$$lím_{x\to 0}\frac{sen(x)-\frac{1}{2}sen(2\mathrm{x})}{x^3}=lím_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}2\mathrm{x}}{x^3}=lím_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}\quad\rightarrow\quad \text{No tiene sentido}$$

Una forma de resolver este límite es utilizar la fórmula trigonométrica del ángulo doble:

$$lím_{x\to 0}\frac{sen(x)-\frac{1}{2}sen(2\mathrm{x})}{x^3}=lím_{x\to 0}\frac{sen(x)-\frac{1}{2}2\mathrm{sen}(x)\cos(x)}{x^3}=lím_{x\to 0}\frac{sen(x)(1-\cos(x))}{x^3}$$

$$=lím_{x\to 0}\frac{x\left(1-1+\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital tres veces seguidas

Ejemplo c.1

$$lím_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)^3}{sen(x)^2}=lím_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^3}{x^2}=\cdots=\frac{3}{2}$$

Nota: Este límite quizá se resuelve más fácilmente por L'Hôpital

Ejemplo c.2

$$lím_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))sen(4\mathrm{x})}{x^3\cos(x)}=lím_{x\to 0}\frac{\left(1-1+\frac{x^2}{2}\right)4\mathrm{x}}{x^3\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}=lím_{x\to 0}\frac{2}{1-\frac{x^2}{2}}=2$$

Nota: Resolver este límite por la regla de L'Hôpital es muy engorroso, porque hay que derivar productos

Ejemplo d.1

En el siguiente límite no se pueden utilizar infinitésimos del apartado (1), por lo que una opción es resolverlo con la regla de L'Hôpital

$$lím_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{x-sen(x)}=lím_{x\to 0}\frac{1+tg(x)^2-1}{1-\cos(x)}=lím_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}(x)\left(1+tg(x)^2\right)}{sen(x)}=2$$

Otra opción es utilizar más términos en los infinitésimos de Taylor

$$lím_{x\to 0}\frac{tg(x)-x}{x-sen(x)}=lím_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}-x}{x-x+\frac{x^3}{3!}}=2$$

Ejemplo d.2

El siguiente límite se va a resolver utilizando los infinitésimos basados en la serie de Taylor. En un entorno del 0, se cumple que $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots,$ por lo que $e^{-x^2/2}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\cdots,$ así que

$$lím_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos(x)}{x^3 sen(x)}=lím_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}}{x^3 x}=lím_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{8}-\frac{x^4}{24}}{x^4}=\frac{1}{12}$$

Ejemplo d.3

El siguiente límite se resuelve fácilmente con la regla de L'Hôpital. Nótese que es *sen(x)* quien está en el entorno de *0*, no la variable *x*.

$$lím_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen(x)-\cos(x)}{1-tg(x)}=lím_{x\to 0}\frac{x-2\mathrm{x}}{x+3\mathrm{x}}=lím_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-(-sen(x))}{-(1+tg(x)^2)}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo e.1

$$lím_{x\to\infty}\frac{-5\mathrm{x}^5+2\mathrm{x}^2-1}{3\mathrm{x}^6}=lím_{x\to\infty}\frac{-5\mathrm{x}^5}{3\mathrm{x}^6}=lím_{x\to\infty}\frac{-5}{3\mathrm{x}}=0$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital cinco veces seguidas

No obstante, quizá es más fácil resolver este límite sin utilizar infinitésimos, sino haciendo

$$lím_{x\to\infty}\frac{-5\mathrm{x}^5+2\mathrm{x}^2-1}{3\mathrm{x}^6}=lím_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^6}\left(-5\mathrm{x}^5+2\mathrm{x}^2-1\right)}{\frac{1}{x^6}3\mathrm{x}^6}=lím_{x\to\infty}\frac{\frac{-5}{x}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^6}}{3}=0$$

Ejemplo e.2

$$lím_{x\to -\infty}\frac{-x^3+2x^2-1}{2x^3}=lím_{x\to -\infty}\frac{-x^3}{2x^3}=-\frac{1}{2}$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital tres veces seguidas

Ejemplo f.1

$$lím_{x\to\infty}\frac{sen\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{3}{x^2}}=lím_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{3}{x^2}}=-\frac{1}{3}$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital

Ejemplo f.2

$$lím_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^3}}}=lím_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^3}}}=lím_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}=0$$

Nota: Este límite se resuelve también aplicando la regla de L'Hôpital

Universidad Complutense de Madrid
∟ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
∟ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II
∟ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012