Notaciones en el Cálculo Diferencial

1. Introducción

Dada una función continua $y = f(x)$, su derivada clásica (existen otras definiciones para funciones deterministas, e incluso para funciones aleatorias o estocásticas) se define, para cada punto x, como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

En el dominio de valores de x en el que este límite, que siempre es una indeterminación de la forma 0/0, existe, queda definida una nueva función que se llama la *derivada* de $f(x)$. Se dice entonces que f(x) es una función *derivable* o *diferenciable*. El límite, y por tanto la derivada, existen en las partes del dominio donde $f(x)$ es «suave» (además de continua, por definición), lo que puede verse en su gráfica. El proceso se puede iterar considerando a la derivada como nueva función sobre la que calcular el límite anterior; esta iteración daría lugar a la segunda derivada, tercera, cuarta y enésima. Una forma de clasificar las funciones continuas en espacios de funciones consiste en considerar el número de derivadas que existen: ninguna, una, dos,... o infinitas. En este último caso, se dice que la función es *analítica*, y admite una representación como serie infinita de potencias x^k. Dado que existen distintas notaciones para estas derivadas, se enumeran brevemente aquí las más importantes y se dan algunos ejemplos de la notación más extendida. En Ciencia, elegir la notación adecuada es muy importante para los usuarios de todos los niveles, pero sobre todo para los noveles.

2. Notaciones

2.1. Lagrange

La notación introducida por Lagrange a finales del siglo XVIII es:

(a) $f', f'', f''', f^{iv}, f^{v}, \cdots$ ó $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{iv}(x), f^{v}(x), \cdots$

(b) $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, \cdots$ ó $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \cdots$

(c) $y', y'', y''', y^{iv}, y^{v}, \cdots$ ó $y'(x), y''(x), y'''(x), y^{iv}(x), y^{v}(x), \cdots$

(d) $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}, \cdots$ ó $y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), y^{(3)}(x), y^{(4)}(x), y^{(5)}(x), \cdots$

2.2. Newton

La notación introducida por Newton (hacia 1671) es:

(e) $\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}, \cdots$ ó $\dot{f}(x), \ddot{f}(x), \dddot{f}(x), \cdots$

(f) $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \cdots$ ó $\dot{y}(x), \ddot{y}(x), \dddot{y}(x), \cdots$

2.3. Arbogast

La notación introducida por Arbogast en 1800 se basa en el *operador derivación*:

(g) $D f, D^2 f, D^3 f, \cdots$ ó $D f(x), D^2 f(x), D^3 f(x), \cdots$

2.4. Leibniz

La notación de Leibniz (1684), la más utilizada, es:

(h) $\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \cdots$ ó $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}, \cdots$ ó $\frac{df}{dx}(x), \frac{d^2 f}{dx^2}(x), \frac{d^3 f}{dx^3}(x), \cdots$

(i) $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \cdots$ ó $\frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2 y(x)}{dx^2}, \frac{d^3 y(x)}{dx^3}, \cdots$ ó $\frac{dy}{dx}(x), \frac{d^2 y}{dx^2}(x), \frac{d^3 y}{dx^3}(x), \cdots$

2.4.1. Diferencias y diferenciales

Se definen las *diferencias*

$$\Delta y = y_2 - y_1 = y(x+h) - y(x) \quad \text{y} \quad \Delta x = x_2 - x_1 = x + h - x = h.$$

Estas diferencias a veces representan *incrementos*, si su valor es positivo, o *decrementos*, si son negativos. Se definen las diferencias de segundo orden como

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) \quad \text{y} \quad \Delta^2 x = \Delta(\Delta x).$$

De forma análoga se definen las diferencias de orden mayor a dos. Es importante distinguir entre $\Delta^k y$ y $(\Delta y)^k$, y entre $\Delta^k x$ y $(\Delta x)^k$. Se puede definir para el caso discreto (sucesiones en un dominio discreto) el *operador diferencia*, que actúa sobre una sucesión para devolver otra:

$$y=(y_1, y_2, y_3, y_4, \cdots)$$

$$\Delta y=(y_2-y_1, y_3-y_2, y_4-y_3, \cdots)$$

$$\Delta^2 y=\Delta(\Delta y)=(y_3-y_2-y_2+y_1, y_4-y_3-y_3+y_2, \cdots)=(y_3-2y_2+y_1, y_4-2y_3+y_2, \cdots)$$

$$\vdots$$

Por otro lado, para el caso continuo (funciones en un dominio continuo), a las cantidades de los numeradores –y denominadores– de las expresiones de (h) e (i) se las llama *diferenciales*, de orden uno si el número volado de la *d* (¡no es un exponente!) es uno, que no se pone explícitamente, y de orden superior para exponentes superiores. De nuevo, es importante distinguir la posición del exponente en $\Delta^k y$ y $dy^k=(dy)^k$, y $d^k x$ y $dx^k=(dx)^k$. En los siguientes párrafos vamos a ver por qué en los denominadores de las expresiones de (h) e (i) se pone un exponente en la variable *x* y no un número volado en el operador *d*.

El acierto, y de ahí la utilidad, de la notación de Leibniz se basa en la conexión de diferencias y diferenciales, como se verá a continuación; sobre qué le llevo a esta notación y por qué es la más extendida y utilizada, Apostol escribe: *Introducida una notación*[,] *la experimentaba largamente y después mantenía extensa correspondencia con otros matemáticos sobre sus ventajas e inconvenientes*.

Nota: Nótese que cuando se escribe Δx^k y dx^k debe entenderse $(\Delta x)^k$ y $(dx)^k$, respectivamente. A veces también se pueden encontrar las expresiones $\Delta(x^k)$ y $d(x^k)$, que son un caso particular de Δy y dy en que $y = x^k$. como se verá en 2.4.4.

2.4.2. Derivada de primer orden

La primera derivada se escribe como

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Es decir, el cociente de dos diferenciales continuos es el límite del cociente de dos diferencias discretas. Para justificar la posición de los exponentes en los diferenciales de orden superior, veamos primero qué sucede en el caso discreto, más sencillo. Sobre la derivación de una función, dice Apostol:

> *No sólo era distinta la notación, sino también la manera de pensar de Leibniz acerca de las derivadas, pues consideraba el límite* dy/dx *como un cociente de cantidades «infinitesimales»* dy *y* dx *que llamaba «diferenciales», y la derivada* dy/dx *era un «cociente diferencial». En vez de utilizar el paso a límite para definir las derivadas, pasaba de* Δy *y* Δx *a* dy *y* dx *indicando simplemente que* Δy [*e*] Δx *se transformaban en infinitesimales. Leibniz imaginaba los infinitesimales como un nuevo tipo de números, que sin ser cero, eran más pequeños que cualquier número real positivo.*
>
> *Durante mucho tiempo se creyó que el Cálculo era intrínsecamente difícil y algo misterioso, porque no era posible comprender lo que era un infinitesimal. Los trabajos de Cauchy y otros matemáticos en el siglo XIX condujeron gradualmente a abandonar las cantidades infinitamente pequeñas como una parte esencial de las Matemáticas. No obstante, son todavía muchos, especialmente entre los que se dedican a la Matemática aplicada, los que consideran útil razonar a la manera de Leibniz a base de los infinitesimales. Muy frecuentemente de esta forma se llega rápidamente a resultados que pueden ser demostrados de manera rigurosa por métodos adecuados.*
>
> *Recientemente Abraham Robinson ha mostrado que el sistema de los números reales puede ser extendido por la incorporación de los infinitesimales de acuerdo a la idea de Leibniz. Una discusión de esta extensión, así como del impacto en otras ramas de la Matemática se encuentra en el libro de Robinson* Non-standard Analysis. *North-Holland Publising, Amsterdam, 1966.*
>
> *Aunque algunas de las ideas de Leibniz no pasaron a la posteridad, no ha ocurrido lo*

mismo con sus notaciones. El símbolo dy/dx *tiene la ventaja manifiesta de resumir el proceso completo del cálculo de un cociente de diferencias y posterior paso a límite. Más tarde se observará que el uso del cociente de diferenciales permite operar más fácilmente y las fórmulas que se obtienen se recuerdan sin dificultad.*

2.4.3. Derivadas de segundo orden y superior

Si escribimos la expresión de la definición de la segunda derivada,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h+h)-f(x+h)}{h}-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h},$$

cuando estos límites existen se pueden operar sus expresiones y obtener

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h+h)-2\mathrm{f}(x+h)+f(x)}{h^2},$$

lo que induce a pensar en el operador $\dfrac{d}{dx}$ como formado por un operador en el numerador y un producto por un diferencial en el denominador. Esto lleva a pensar en la notación

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d(dy)}{dxdx}=\frac{d^2y}{dx^2}\quad \text{y, por iteración,}\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right)=\frac{d^ky}{dx^k}.$$

Nota: Algunas veces se ve la notación incorrecta $\dfrac{df}{dx},\dfrac{d^2f}{d^2x},\dfrac{d^3f}{d^3x},\cdots$

2.4.4. Más sobre diferenciales

De las fórmulas anteriores, y si operamos con los diferenciales con la «ligereza» que mencionaba Apostol, tendríamos que

$$y^{(k)}=\frac{d^ky}{dx^k}\quad\rightarrow\quad d^ky=y^{(k)}dx^k$$

A este mismo resultado se llega, en este caso por definición, en el libro de Demidovich y otros (ver las referencias). Las implicaciones son comunes a ambos casos. Sin embargo, históricamente (véanse las citas del libro de Ríbnikov que se dan más abajo) ha prevalecido el uso de la derivada en vez de las definiciones de diferenciales que se dan a continuación.

De primer orden

En este libro (Demidovich y otros) se define la *diferencial de primer orden* de una función como el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, esto es

$$dy=y^{(1)}dx,\quad \text{de donde deduce que}\quad y^{(1)}=\frac{dy}{dx}.$$

Después se enumeran una serie de propiedades de la diferencial

1) $dc = 0$, donde c es una constante
2) $dx = \Delta x$, donde x es la variable independiente
3) $d(cu) = c\,du$
4) $d(u \pm v) = du \pm dv$
5) $d(uv) = v\,du + u\,dv$
6) $d(u/v) = (v\,du - u\,dv)/v^2$

7) $df(u) = f'(u)du$

Nota: Leibniz dio ya las expresiones 5 y 6, además de $d(u^k) = k\, u^{k-1}du$, en su obra *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas nec irrationales quantitates moratur* (*Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales*).

De segundo orden y superiores

También se define la *diferencial de segundo orden* de una función como la diferencial de la diferencial de primer orden. Análogamente se definen las diferenciales consecutivas. Entonces, ahora por definición,

$$d^2 y = d(dy) = y^{(2)}(dx)^2, \qquad d^3 y = y^{(3)}(dx)^3, \qquad \cdots \qquad d^k y = y^{(k)}(dx)^k$$

Aplicación a la derivación

La notación de diferenciales permite derivar «con respecto a una función», lo que no es sino una cuestión de notación y otra forma de la regla de la cadena:

$$y = x^6 - 5x^3 + 7 = (x^3)^2 - 5x^3 + 7 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(x^3)}\frac{d(x^3)}{dx} = (2x^3 - 5)3x^2$$

Aplicación a la resolución de integrales indefinidas

Existe la posibilidad de aprovechar esta notación de los diferenciales para resolver algunas integrales sencillas, dado que, por ejemplo:

(a) Si $y = ax + b$, entonces $d(ax+b) = dy = a\,dx$, de donde, si $a \neq 0$, $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$

(b) Si $y = x^k$, entonces $d(x^k) = kx^{k-1}dx$, de donde, $dx = \frac{1}{k\,x^{k-1}} d(x^k)$

(c) Si $y = f(x)$, entonces $d(f(x)) = f'(x)dx$, de donde, si $f'(x) \neq 0$, $dx = \frac{d(f(x))}{f'(x)}$

<u>Método de introducción bajo el signo de la diferencial</u>: Teniendo en cuenta las expresiones de los diferenciales de las funciones, *dy*, se puede hacer:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

o, más generalmente, y dado que $u'(x)dx = du$,

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

A esta manera de resolver integrales, en el libro de Demidovich y otros se le llama *introducción bajo el signo de la diferencial*.

<u>Método de sustitución o cambio de variable</u>: Ahora, teniendo en cuenta las expresiones de los diferenciales de la variable independiente, *dx*, se puede hacer:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^u \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + c = \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

o, más generalmente, y dado que $dx = du/u'(x)$,

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))u'(x)\frac{du}{u'(x)} = \int f(u)du$$

A esta manera de resolver integrales, en el libro de Demidovich y otros se le llama de *sustitución o cambio de variable*.

Esencialmente, ambos métodos son el mismo, pero quizá el primero se utiliza menos porque sólo es aplicable, en la práctica, con integrales sencillas, además de porque es necesario conocer mejor los diferenciales.

2.5. Comentarios sobre las notaciones

La preferencia de una notación u otra puede depender del área concreta de la ciencia donde se trabaje, de la tradición histórica o de motivos prácticos; también hay ejemplos en la historia de usos basados en motivos patrióticos, chovinistas o sentimentales, lo que no suele ser conveniente en ciencia: algunos historiadores de la Ciencia opinan que la tozudez con que los británicos siguieron utilizando la notación de su compatriota Newton, en vez de la del continental Leibniz les supuso un «retraso» en sus matemáticas. Por ejemplo, en el libro de Simmons mencionado en las referencias se puede leer (páginas 159 y 160):

> *Todo esto* [disputa histórica por la paternidad del cálculo diferencial, entre Newton y Leibniz] *ya era de por sí bastante nefasto, pero el efecto desastroso que tuvo sobre la ciencia y las matemáticas británicas fue todavía más serio. Utilizar los métodos geométricos de Newton y sus farragosas notaciones de cálculo, así como no mirar más allá de las narices en cuanto tuviese relación con el trabajo creador que se hacía en el continente, se convirtió en una cuestión de lealtad patriótica. Sin embargo, los métodos analíticos de Leibniz demostraron ser más útiles y efectivos, y fueron sus seguidores quienes culminaron el período más enriquecedor de la historia de las matemáticas. Para los británicos, la obra de los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss y Riemann fue como un libro cerrado, y los matemáticos ingleses se sumieron en un coma de impotencia e irrelevancia que se prolongó a lo largo de los siglos XVIII y XIX casi por completo*.

En el libro de Ríbnikov, de sesgo filosoviético (hace abundante uso de K. Marx como testigo e historiador de la ciencia), se puede leer (página 233):

> *La primera reacción de los matemáticos ingleses (Jurín, Robins, Pimberton, Maclaurin y otros) fue la defensa de la teoría de las fluxiones y la autoridad de Newton. Ellos comentaron sus trabajos e introdujeron perfeccionamientos parciales. Además, fueron expresadas no pocas ideas útiles. Así, por ejemplo, se dedicó atención a un tratamiento correcto del concepto de límite de una magnitud variable. Sin embargo, este camino resultó, como era de esperar, históricamente infructuoso*.

y (página 243)

> *Enseguida después del surgimiento de los primeros trabajos de G. W. Leibniz se aclaró que su cálculo de diferenciales y el simbolismo tenían mayores ventajas respecto al cálculo de fluxiones y el correspondiente sistema de símbolos. Ellos reflejaban mejor la esencia de las operaciones del análisis y este último, naturalmente, tomó la forma, en lo fundamental, predicha por Leibniz. Sin embargo, en calidad de concepto fundamental de las matemáticas del siglo XVIII, a diferencia de Leibniz, tomaron no la diferencial, sino la derivada como menos vulnerable lógicamente. La formulación del problema del cálculo diferencial cambió*.

Por último, aparte de afirmaciones parecidas a las anteriores, en el libro de Boyer se puede leer (página 518):

> *Como consecuencia de esta desdichada disputa* [entre Newton, Leibniz y los partidarios de ambos] *por la prioridad, los matemáticos ingleses se mantuvieron en buena medida aislados de los matemáticos del continente durante la mayor parte del siglo XVIII. Así pues, las siguientes generaciones de matemáticos ingleses sufrieron una especie de castigo a la mala fe de los*

seguidores de Newton hacia Leibniz, con el resultado de que terminaron por quedarse ampliamente rezagados con respecto a los de la Europa continental.

Pese a todo, es de Leibniz la frase: *Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.*

Algunos otros comentarios sobre las distintas notaciones son los siguientes:

(1) Las notaciones de Lagrange, Newton y Arbogast ponen de manifiesto que la derivación es un operador entre espacios de funciones, es decir, que el resultado es otra función.

(2) Las notaciones de Lagrange, Newton y Arbogast son útiles cuando está claro cuál es la variable independiente con respecto a la cual se está derivando.

(3) La notación de Leibniz muestra de forma explícita la variable con respecto a la cuál se está operando.

(4) La notación de Newton no es cómoda para más de tres o cuatro derivadas, por el alto número de puntos que habría que poner encima de las letras. Por este motivo, por la faceta de físico de Newton y porque al estudiar movimientos es necesario considerar hasta la segunda derivada (aceleración), esta notación se utiliza en la Física dentro de sus distintos tipos de Mecánica.

(5) La notación de Arbogast facilita la interpretación de la derivación como una potenciación (del operador), lo que se utiliza en algunos métodos operacionales. Un ejemplo de su utilización en un método de resolución de ecuaciones diferenciales puede verse en

http://www.Casado-D.org/edu/NotasEcuacionesDiferenciales.pdf

(6) Aunque se pueden –y se suelen– combinar varias notaciones siempre que no haya lugar a dudas, la notación de Leibniz permite hablar de distintos tipos de diferenciales –de longitud, de área, de volumen, de un vector, de un operador, etcétera, o para las aplicaciones, donde se habla de diferenciales de masa, de carga, de trabajo, de fuerza, etcétera–, y esta notación es la más cómoda para los distintos tipos de integrales: múltiples (dobles, triples...) con distintos tipos de coordenadas; en campos escalares y vectoriales: de línea, de superficie y de volumen, donde se les puede dar un carácter vectorial a los diferenciales; o incluso para integrales estocásticas.

2.6. Derivadas parciales

En funciones de varias variables, $f(x,y,z)$, para indicar con respecto a cuál se está derivando, es decir, cuál de todas las posibles *derivadas parciales* se está considerando, las notaciones suelen adquirir la forma, donde en este ejemplo el 1 indica que x está en la primera posición de la terna (x,y,z):

Lagrange: f'_x ó f'_1

Newton: $\dot{f}_x$ ó $\dot{f}_1$

Arbogast: $D_x f$ ó $D_1 f$

Leibniz: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

3. Formas de derivación

3.1. Explícita

Cuando una función (volvemos a las de una sola variable x) viene dada en la forma $y = f(x)$, se dice que está expresada en *forma explícita*. La variable x es la *variable independiente* y la y depende –es función– de ella, y se dice que es la *variable dependiente*; hay una jerarquía entre ellas. Se pueden invertir estos papeles de las variables invirtiendo la función: $f^{1}(y) = x$. Cuál es la dependiente y cuál la independiente depende de la interpretación del problema (lo que representen las variables), o, si hay libertad, de nuestras preferencias. Todas las fórmulas dadas hasta ahora estaban dadas para la *derivación explícita*.

3.2. Implícita

Cuando una función viene dada en la forma $f(x,y) = 0$, se dice que está expresada en *forma implícita*. No viene dada una jerarquía entre ellas, por lo que la que se despeje será la dependiente y la otra la independiente. A veces no sabemos o no es posible despejar una variable, lo que no implica que no podamos derivar una expresión con respecto a ella. Esta operación se llama *derivación implícita*, y, dado que ahora hay dos variables, utiliza –aunque sea mentalmente y no se explicite en la práctica– el concepto de derivación parcial:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \qquad \text{ó} \qquad \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Nota: En las formas explícita e implícita, una función y una variable, o dos variables, se relacionan directamente. Cuando se relacionan a través de una tercera variable, como sucede cuando vienen dadas en forma paramétrica, la derivación es distinta. Esta forma se ve en otra sección.

4. Algunas propiedades

Veamos a continuación cómo se expresan algunas propiedades o resultados. Aunque no se haga aquí, es posible escribir las reglas, propiedades, tablas de derivadas, etcétera, en cualquiera de las notaciones.

4.1. Derivada de la función inversa

Lagrange: $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'}$ ó $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Newton: $\dot{f}^{-1} = \dfrac{1}{\dot{f}}$ ó $\dot{f}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\dot{f}(x)}$

Arbogast: $Df^{-1} = \dfrac{1}{Df}$ ó $Df^{-1}(x) = \dfrac{1}{Df(x)}$

Leibniz: $\dfrac{df^{-1}}{dx} = \dfrac{1}{\frac{df}{dx}} = \dfrac{dx}{df}$ ó $\dfrac{df^{-1}(x)}{dx} = \dfrac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \dfrac{dx}{df(x)}$

4.2. Derivada de una funciones en forma paramétrica

Puede suceder que dos variables –o más– vengan dadas en *forma paramétrica*:

$$\begin{cases} y=a(t) \\ x=b(t) \end{cases}$$

El hecho de que ambas sean función de una variable independiente o *parámetro* común t, indica que hay una relación entre ellas, aunque sea indirecta. En esta forma, no hay una jerarquía entre x e y, pero sí de ambas con respecto a la variable independiente t. Dado que a y b son funciones de t, pueden utilizarse cualquiera de las cuatro notaciones mencionadas anteriormente. Ahora sólo incidimos en que, con la notación de Leibniz se puede hacer:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dt}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Es posible pasar de la forma paramétrica de x e y a una forma implícita y, a veces, explícita. Para ello hay que despejar el parámetro t, o una expresión común a ambas ecuaciones en que aparezca t, y después igualar.

4.3. Regla de la cadena

Es muy importante saber derivar la composición de funciones, en la que una primera función depende de una variable independiente y una segunda función depende de la primera, $g\circ f(x) = g(f(x))$, que representa los dos pasas $x \to f(x) \to g(f(x))$. La regla que rige esta derivación se llama *regla de la cadena*:

Lagrange: $(g\circ f)'=g'(f)f'$ ó $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$

Newton: $(\dot{g\circ f})=\dot{g}(f)\dot{f}$ ó $(\dot{g\circ f})(x)=\dot{g}(f(x))\dot{f}(x)$

Arbogast: $D(g\circ f)=Dg(f)Df$ ó $D(g\circ f)(x)=Dg(f(x))Df(x)$

Leibniz: $\dfrac{d(g\circ f)}{dx}=\dfrac{d\,g(f)}{dx}\dfrac{df}{dx}$ ó $\dfrac{d(g\circ f)(x)}{dx}=\dfrac{d\,g(f(x))}{dx}\dfrac{df(x)}{dx}$

De forma más concisa, sin escribir con tanto cuidado las relaciones explícitas, con la notación de Leibniz puede escribirse, cuando hay una función z entre x e y, es decir, cuando $y = y(z(x))$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}, \quad \text{ó, utilizando ligeramente la notación,} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dz}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}.$$

4.4. Ejemplos de operaciones con diferenciales

Estos son algunos de los tipos de operaciones que, con la notación de Leibniz, uno se puede encontrar en los libros:

Ejemplo 1:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{dx}\frac{d(dy)\cdot dx-dy\cdot d(dx)}{dx^2}=\frac{d^2 y\cdot dx-dy\cdot d^2 x}{dx^3}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{dx}{dt}=z \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{z}=dt$$

Ejemplo 3:

$$\frac{dy}{dt}=\cdots=x\left(z+\frac{dz}{dt}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{x}=z\,dt+dz$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left[x\left(z+\frac{dz}{dt}\right)\right]=\frac{dx}{dt}\left(z+\frac{dz}{dt}\right)+x\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2 z}{dt^2}\right)=x\left(z+2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2 z}{dt^2}\right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{d^2 y}{x}=dt^2\left(z+2\frac{dz}{dt}+\frac{d^2 z}{dt^2}\right)=dt^2 z+2\,dz\,dt+d^2 z$$

5. Referencias

[1] Apostol, Tom M. *Cálculus.* Editorial Reverté (reimpresión de septiembre del 2006).

[2] Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial (1994, 1ª edición, 3ª reimpresión).

[3] Demidovich, B., G. Baranenkov, V. Efimenko, S. Kogan, G. Lunts, E. Porshneva, E. Sichova, S. Frolov, R. Shostak y A. Yanpolsky. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Editorial Paraninfo (1993).

[4]Ríbnikov, K. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir Moscú (1991, 1ª edición, 1ª reimpresión).

[5] Simmons, George F. *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*. McGraw Hill (1991, 2ª edición).

Universidad Complutense de Madrid

∟ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

∟ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II

∟ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012