Puedes no imprimir este archivo y consultarlo en formato digital, ahorrarás papel y tinta. Si decides imprimirlo, por favor hazlo en papel reciclado, a doble cara y con poca tinta. Sé ecológico. Muchas gracias.

Notas de Análisis

1. Vectores
  - 1.1 Producto escalar
    - 1.1.1. Módulo de un vector
    - 1.1.2. Ángulo entre dos vectores
    - 1.1.3. Ortogonalidad
  - 1.2. Producto vectorial
    - 1.2.1. Paralelismo
    - 1.2.2. Cálculo del áreas
  - 1.3. Producto mixto
    - 1.3.1. Cálculo del volúmenes
    - 1.3.2. Coplanariedad

2. Funciones de una variable
  - 2.1. Dominio
  - 2.2. Límites
    - 2.2.1. Indeterminaciones de la forma $0/0$
    - 2.2.2. Indeterminaciones de la forma ∞/∞
    - 2.2.3. Indeterminaciones de la forma $\infty\cdot 0$
    - 2.2.4. Indeterminaciones de la forma $\infty-\infty$
    - 2.2.5. Indeterminaciones de las formas ∞^0, 0^0 o 1^∞
  - 2.3. Continuidad
  - 2.4. Funciones elementales
  - 2.5. Interpolación
  - 2.6. Ecuaciones
  - 2.7. Derivación de funciones de una variable
    - 2.7.1. Recta tangente a una curva. Pendiente de la recta
    - 2.7.2. Función derivada
    - 2.7.3. La diferencial
    - 2.7.4. Tabla de derivadas
    - 2.7.5. Propiedades para las funciones construidas a partir de otras
    - 2.7.6. Aplicaciones de la derivada
  - 2.8. Representación gráfica
    - 2.8.1. Puntos de corte
    - 2.8.2. Asíntotas
    - 2.8.3. Crecimiento y decrecimiento
    - 2.8.4. Concavidad y convexidad
    - 2.8.5. Extremos relativos: mínimos y máximos relativos
    - 2.8.6. Extremos absolutos
  - 2.9. Integrales indefinidas
    - 2.9.1. Propiedades
    - 2.9.2. Método de integración inmediata
    - 2.9.3. Método de cambio de variable
    - 2.9.4. Método de integración por partes
    - 2.9.5. Integración de funciones racionales
    - 2.9.6. Algunas integrales «con truco»
  - 2.10. Integrales definidas propias
    - 2.10.1. Función integrable según Riemann
    - 2.10.2. Propiedades
    - 2.10.3. Primer teorema fundamental del cálculo integral
    - 2.10.4. Segundo teorema fundamental del cálculo integral o regla de Barrow
    - 2.10.5. Cálculo de áreas (es necesario que se corrija el signo que la integral definida asigna)
    - 2.10.6. Cálculo de la longitud de arco
    - 2.10.7. Cálculo de volúmenes
  - 2.11. Integrales definidas impropias
    - 2.11.1. De intervalo no acotado
    - 2.11.2. De función no acotada
  - 2.12. Ecuaciones diferenciales ordinarias

3. Funciones de varias variables
3.1. Dominio
3.2. Representación gráfica
3.2.1. Curvas y superficies de nivel
3.3. Límites reiterados y direccionales
3.4. Continuidad
3.4.1. Tipos de discontinuidades
3.5. Derivadas direccionales y parciales
3.6. Matrices de derivadas parciales
3.6.1. Vector gradiente
3.6.2. Matriz jacobiana
3.7. Diferenciabilidad
3.7.1. Matriz hessiana
3.8. Plano tangente (n = 2) a la superficie
3.9. Recta perpendicular (n = 2) a la superficie
3.10. Extremos de funciones de varias variables
3.10.1. Extremos relativos
3.10.2. Extremos absolutos
3.10.3. Optimización de funciones con restricciones de igualdad
3.11. Fórmula de Taylor
3.12. Integrales dobles (n = 2)
3.12.1. Condiciones de integrabilidad
3.12.2. Integración reiterada
3.12.3. Cambio en el orden de integración
3.12.4. Cambio de variable
3.12.5. Regiones
3.12.6. Cálculo de áreas
3.12.7. Cálculo de volúmenes

A. Apéndice
A.1. Notación en el Cálculo Diferencial

1. Vectores

Un vector es un conjunto de escalares (números) ordenados, y puede darse como:

$$\vec{a}=(a_{1,}a_{2,}\cdots,a_n)$$

Nota: A veces se utiliza la notación $\vec{a}=\boldsymbol{a}$, como se hace más adelante en este documento.

o, lo que es equivalente, como

$$\vec{a}=a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+\cdots a_n\cdot\vec{e}_n$$

donde cada vector $\vec{e}_i$ vamos a suponer que es un vector de longitud 1 que está sobre uno de los ejes, que son perpendiculares entre sí (base canónica).

1.1. **Producto escalar**

El producto escalar es un operación que se define entre dos vectores y que da como resultado un escalar (número). Se define como:

Forma 1:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

Forma 2: Se cumple que si los vectores $\vec{e}_i$ son unitarios y perpendiculares entre sí:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n$$

Propiedades

- Nulidad: El producto puede valer 0 por varios motivos:
  1) Cuando $|\vec{a}|=0$, es decir, cuando $\vec{a}=0$
  2) Cuando $|\vec{b}|=0$, es decir, cuando $\vec{b}=0$
  3) Cuando $\cos\alpha=0$, es decir, cuando $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Esto sucede cuando los vectores son perpendiculares entre sí
- Propiedad conmutativa: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- Propiedades distributiva: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

1.1.1. Módulo de un vector

Esta operación se puede utilizar para definir el módulo de un vector, ya que:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2 \qquad \rightarrow \qquad |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

Un vector es unitario si su módulo (longitud) es 1. A partir de cualquier vector se puede construir uno unitario sin más que dividirlo por su módulo, es decir:

$$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

De nuevo, si los vectores $\vec{e}_i$ son unitarios y perpendiculares entre sí (ortogonales), se tiene que:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

lo que puede verse como el teorema de Pitágoras en *n* dimensiones.

1.1.2. Ángulo entre dos vectores

Dado que $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$ y $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n$, otra aplicación del producto escalar consiste en definir el ángulo entre dos vectores como

$$\cos\alpha=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Nota: Recuérdese que la expresión del numerador y, por tanto, esta definición, son ciertas para una base ortonormal

1.1.3. Ortogonalidad

Dado que este producto involucra el $\cos\alpha$, puede utilizarse para definir o comprobar si dos vectores son perpendiculares: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

1.2. **Producto vectorial**

El producto vectorial es un operación que se define entre dos vectores y que da como resultado otro vector. Este producto se puede calcular como:

Forma 1: Calculando su módulo con

$$|\vec{a}\,x\,\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot sen\,\alpha$$

donde *α* es el ángulo que forman los dos vectores, y su su dirección con la *regla del tornillo* o *del sacacorchos*.

Forma 2: Aplicando la fórmula:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_1-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_3$$

Una regla mnemotécnica para recordar esta fórmula anterior, que abusa un poco de la notación, porque no se pueden mezclar vectores y números en una matriz, es:

$$\vec{a}\,x\,\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

donde se calcularía el determinante desarrollándolo por la primera fila.

Propiedades

- Nulidad: El producto puede valer 0 por varios motivos:
  1) Cuando $|\vec{a}|=0$, es decir, cuando $\vec{a}=0$
  2) Cuando $|\vec{b}|=0$, es decir, cuando $\vec{b}=0$
  3) Cuando $sen\,\alpha=0$, es decir, cuando $\alpha=k\cdot\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Esto sucede cuando los vectores están alineados (yacen en la misma línea, sea con el mismo sentido o con sentido opuesto)
- Propiedad anticonmutativa: $\vec{a}\,x\,\vec{b}=-\vec{b}\,x\,\vec{a}$
- Propiedades distributiva: $\vec{a}\,x\,(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\,x\,\vec{b}+\vec{a}\,x\,\vec{c}$

1.2.1. Paralelismo

Dado que este producto involucra el $sen\,\alpha$, puede utilizarse para comprobar si dos vectores son paralelos: $\vec{a}\,x\,\vec{b}=0$

1.2.2. Cálculo del áreas

Una aplicación del producto vectorial se basa en que proporciona el área del paralelogramo que forman los dos vectores (nótese que si son paralelos, el área es cero, como el producto vectorial). Por tanto, también permite hallar el área del triángulo que es la mitad del paralelogramo. Finalmente, permite calcular el área de una región que se pueda descomponer en triángulos.

1.3. **Producto mixto**

El producto mixto es un operación que se define entre tres vectores como

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\,x\,\vec{c})$$

Forma 1: Haciendo los cálculos según lo visto para los productos escalar y mixto

Forma 2: Se puede comprobar que

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\,x\,\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades

- Nulidad: El producto puede valer 0 por varios motivos:
  1) Cuando $\vec{a}=0$
  2) Cuando $\vec{b}=0$
  3) Cuando $\vec{c}=0$
  4) Cuando el determinante es nulo, es decir, cuando los tres vectores no son linealmente independientes (existe un plano que los contiene)

1.3.1. Cálculo del volúmenes

Una aplicación del producto vectorial se basa en que proporciona el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores. Por tanto, también permite hallar el volumen del tetraedro (como una pirámide, posiblemente irregular) que es la mitad del paralelogramo. Finalmente, permite calcular el volumen de una región tridimensional que se pueda descomponer en tetraedros.

1.3.2. Coplanariedad

Dado que este producto calcula el volumen, puede utilizarse para comprobar si tres vectores están en el mismo plano, lo que sucede si el tetraedro que forman tiene volumen cero: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\,x\,\vec{c})=0$

2. Funciones de una variable

2.1. Dominio

Son los valores que puede tomar la variable independiente. Los puntos que con más frecuencia hay que excluir, son:

- En un cociente, el denominador no puede ser nulo
- Una raíz de orden par (cuadrada, cuarta, sexta, etc.) sólo se puede aplicar (con números reales) a una cantidad no negativa
- Un logaritmo (de cualquier base) sólo se puede aplicar (con números reales) a una cantidad positiva

Nota: Una expresión matemática tiene sentido sólo cuando todas sus partes lo tienen a la vez, por lo que el dominio final es la intersección de los dominios de esas partes.

2.2. Límites

Propiedades, cuando ambos límites existan y sean finitos,

- Suma: $lím[f(x)+g(x)]=lím\, f(x)+lím\, g(x)$
- Resta: $lím[f(x)-g(x)]=lím\, f(x)-lím\, g(x)$
- Producto: $lím[f(x)\cdot g(x)]=lím\, f(x)\cdot lím\, g(x)$
- Producto por un escalar: $lím[c\cdot f(x)]=c\cdot lím\, f(x)$ (caso particular del anterior)

- Cociente: $lím \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lím\, f(x)}{lím\, g(x)}$
- Inverso de una función: $lím \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{lím\, f(x)}$ (caso particular del anterior)
- Potenciación: $lím\, f(x)^{g(x)} = lím\, f(x)^{lím\, g(x)}$
- Logaritmo: Si $f(x)>0$ y $\lim f(x)>0$, entonces $lím \log(f(x)) = \log(lím\, f(x))$
- Composición: Si $g(x)$ es continua en el punto/valor $lím\, f(x)$, entonces $\lim (g \circ f)(x) = lím_{x \to lím\, f(x)}\, g(x) = g(lím\, f(x))$

2.2.1. Cálculo de límites

A la hora de calcular un límite (de una función), primero hay que intentar sustituir el valor al que tiende la *x*. Si la expresión tiene sentido y toma un valor concreto, es necesario observar si hay algún factor/parte multiplicando o dividiendo (puede ser todo el numerador o denominador) que se mueve en torno al valor 0. Si no la hay, en general no suele ser necesario calcular los límites laterales; en otro caso, conviene tenerlos en cuenta, porque el signo de ese factor/parte puede influir fuertemente en el resultado. Por otro lado, hay situaciones en que dos factores contribuyen a determinar el valor del límite en dos direcciones distintas, y es necesario determinar cuál tiene más importancia en el límite. Estos casos, llamados *indeterminaciones*, son los siguientes:

- En $\frac{0}{0}$ el numerador impulsa el resultado hacia cero y el denominador hacia infinito
- En $\frac{\infty}{\infty}$ el numerador impulsa el resultado hacia infinito y el denominador hacia cero
- En $\infty - \infty$ ambos factores impulsan el resultado hacia infinito, con el signo de cada uno (si ambos tienen signos opuestos, como el segundo término cambia por el menos, no habría indeterminación)
- En $\infty \cdot 0$ el primer factor impulsa el resultado hacia infinito y el segundo hacia cero
- En ∞^0 la base impulsa el resultado hacia infinito y el exponente hacia uno (cualquier número elevado a cero es uno)
- En 0^0 el base impulsa el resultado hacia cero y el exponente hacia uno (cualquier número elevado a cero es uno)
- En 1^∞ la base impulsa el resultado hacia uno y el exponente hacia infinito, (si la base es mayor que uno) o cero (si la base es menor que cero)

Nota: Los límites de la forma 0^∞ no son indeterminaciones, porque la base impulsa el resultado hacia cero y el exponente hacia cero (si el exponente es positivo) o hacia infinito (si el exponente es negativo); si el exponente tiende a infinito con signo alterno, no existe el límite.

2.2.2. Indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$

a) Si la función es un cociente de polinomios, se factorizan (por Ruffini o, para grado dos, con la conocida fórmula) en producto de factores y se cancelan los comunes al numerador y denominador. Antes de factorizar, y si aparecen raíces cuadradas, puede ser necesario multiplicar al numerador y denominador por el conjugado del término que tiene las raíces. Así suele desaparecer la raíz del término que da problemas y probablemente ahora se pueda factorizar como un polinomio. En este caso, los pasos serían: (1) Factorizar el numerador y el denominador; (2) Simplificar los factores comunes; (3) Volver al cálculo del límite.

b) Para cocientes de funciones más generales (no necesariamente polinomios), pero derivables, se suele aplicar la regla de L'Hôpital

$$lím\frac{f(x)}{g(x)}=lím\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cuando este segundo límite existe (es finito)

Nota: Si es necesario, se podría aplicar varias veces seguidas esta regla

c) A veces se utiliza un resultado que dice que el límite no varía cuando una función se sustituye por otra equivalente: los *infinitésimos* e *infinitos equivalentes*. Por ejemplo, en un límite se puede sustituir una función *f(x)* por otra *h(x)* si $lím_{x\to x_o}\frac{f(x)}{h(x)}=1$. Los infinitésimos más utilizados son los siguientes:

(1) Cuando $x\approx 0$, se tienen las siguientes aproximaciones, que se convierten en igualdades en el límite:

$$sen(x)\approx x \qquad tg(x)\approx x \qquad arcsen(x)\approx x \qquad arctg(x)\approx x \qquad e^x\approx 1+x$$

$$\cos(x)\approx 1-\frac{x^2}{2} \qquad \ln(1+x)\approx x \qquad \frac{1+x}{x}\approx\frac{1}{x} \qquad \frac{1}{1+x}\approx 1-x$$

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a},\quad a>0 \qquad (1+x)^k\approx 1+kx,\quad k\in\mathbb{N}$$

Nota: Muchas de estas aproximaciones pueden demostrarse fácilmente con la regla de L'Hôpital

Nota: Con estos infinitésimos, la mayoría de las funciones se sustituyen por un cociente equivalente de polinomios

(2) Los infinitésimos del primer punto también son ciertos para funciones más generales. Cuando $f(x)\approx 0$, sea en el entorno $x\approx 0$ o en otro $x\approx x_0$,

$$sen(f(x))\approx f(x) \qquad \cdots$$

Como casos particulares interesantes:

$$f(x)=-x, \quad f(x)=-g(x)\approx 0, \quad f(x)=x-c\approx 0, \quad f(x)=c-x\approx 0,$$

$$f(x)=g(x)-c\approx 0, \quad f(x)=c-g(x)\approx 0.$$

Suele utilizarse mucho el caso $c=1$. Entonces es útil hacer un *cambio de variable* en el límite; por ejemplo, haciendo ahora el cambio $x-1=y$,

$$lím_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x}=lím_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{1-y-1}=lím_{y\to 0}\frac{y}{-y}=-1$$

Hay más explicaciones sobre infinitésimos e infinitos, además de ejemplos de límites resueltos, en http://www.Casado-D.org/edu/InfinitesimosInfinitos.pdf.

2.2.3. Indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

a) Si la variable tiende a infinito y la función es un cociente de polinomios, se utiliza la aproximación $a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_0\approx a_k x^k$ en el numerador y el denominador, a continuación se hacen las simplificaciones posibles y se resuelve el límite.

b) Se puede convertir en una indeterminación de la forma anterior haciendo

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

c) Para este tipo de indeterminaciones, también se puede aplicar la regla de L'Hôpital

$$lím\frac{f(x)}{g(x)}=lím\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

cuando este segundo límite existe (es finito)

Nota: Si es necesario, se podría aplicar varias veces seguidas esta regla

d) También se pueden utilizar infinitésimos, tanto para valores no finitos como los que se han visto para las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ (si se convierte el límite en uno de esta indeterminación, claro)

2.2.4. Indeterminaciones de la forma $\infty\cdot 0$

Se hacen operaciones (mover del numerador al denominador, por ejemplo) para escribirlo como una de las indeterminaciones anteriores

2.2.5. Indeterminaciones de la forma $\infty-\infty$

La idea es hacer alguna operación que las convierta en indeterminaciones de los tipos anteriores: según el caso o se efectúa la resta o se multiplica al numerador y denominador por el conjugado

2.2.6. Indeterminaciones de las formas ∞^0, 0^0 o 1^∞

Cuando $f(x)^{g(x)}$ toma valores positivos, se puede aplicar el logaritmo y, por tanto,

$$lím\, f(x)^{g(x)}=lím\, e^{\ln[f(x)^{g(x)}]}=lím\, e^{g(x)\cdot\ln[f(x)]}$$

En general, el exponente se convierte en una indeterminación de otro tipo. Para las indeterminaciones del tipo 1^∞, como cuando $f(x)\approx 1$ se cumple que $\ln(f(x))\approx f(x)-1$ (son infinitésimos equivalentes), la fórmula anterior también se puede encontrar en algunos libros, para este caso, como

$$lím\, f(x)^{g(x)}=lím\, e^{g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

2.3. Continuidad

Una función es *continua* en un punto si existe en ese punto, existen todos los límites y todos estos valores anteriores coinciden.

$$lím_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=f(x_0)$$

Una función es *discontinua* si no es continua. Tipos de discontinuidades: *evitables* (cuando lo límites coinciden pero no coinciden con el valor de la función) o *inevitables* (cuando los límites no coinciden entre sí); estas últimas pueden ser de salto finito (la diferencia entre los límites es finita) o infinito (si no).

2.4. Funciones elementales: funciones polinómicas y racionales, funciones trigonométricas, logaritmo, función exponencial, funciones hiperbólicas

2.5. Interpolación: el problema de interpolación de Lagrange, forma de Lagrange del polinomio interpolador, forma de Newton del polinomio interpolador, el error de interpolación

2.6. Ecuaciones: solución de una ecuación, método de bisección, método de Régula-Falsi

2.7. Derivación de funciones de una variable

2.7.1. Recta tangente a una curva. Pendiente de la recta

2.7.2. Función derivada

2.7.3. La diferencial

2.7.4. Tabla de derivadas para algunas funciones elementales

- x^a, donde a es un número real $\rightarrow$ ax^{a-1} (nótese que a puede ser positivo, negativo, entero, decimal, fraccionario o irracional)
- $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{-1}{x^2}$ (caso particular del anterior)
- $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (también un caso particular del primero)
- $\log_a(x) \rightarrow \frac{1}{x}\log_a(e)$
- $\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$ (caso particular del anterior)
- $a^x \rightarrow a^x \ln(a)$
- $e^x \rightarrow e^x$ (caso particular del anterior)
- $sen(x) \rightarrow \cos(x)$
- $\cos(x) \rightarrow -sen(x)$
- $tg(x) \rightarrow \frac{1}{\cos(x)^2}$ ó usando $\frac{1}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + sen(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + tg(x)^2$
- $arcsen(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos(x) \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arctg(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$

2.7.5. Propiedades para las funciones construidas a partir de otras

- Suma: $f(x)+g(x)+\cdots \quad \rightarrow \quad f'(x)+g'(x)+\cdots$
- Resta: $f(x)-g(x)-\cdots \quad \rightarrow \quad f'(x)-g'(x)-\cdots$
- Producto: $f(x)\cdot g(x) \quad \rightarrow \quad f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
- Producto por un escalar: $c\cdot f(x) \quad \rightarrow \quad c\cdot f'(x)$ (caso particular del anterior)
- Cociente: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- Inverso de una función: $\dfrac{1}{f(x)} \quad \rightarrow \quad \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}$ (caso particular del anterior)
- Función inversa: $f^{-1}(x) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- Composición: $(g\circ f)(x)=g(f(x)) \quad \rightarrow \quad g'(f(x))\cdot f'(x)$ (*Regla de la cadena*)
  Esta regla tiene como consecuencia que:
- $f(x)^a$, donde a es un número real $\rightarrow \quad a\, f(x)^{a-1} f'(x)$
- $\sqrt{f(x)} \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$ (caso particular del anterior)
- $\log_a(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{f(x)}\log_a(e) f'(x)$
- $\ln(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{f(x)} f'(x)$ (caso particular del anterior)
- $a^{f(x)} \quad \rightarrow \quad a^{f(x)}\ln(a) f'(x)$
- $e^{f(x)} \quad \rightarrow \quad e^{f(x)} f'(x)$ (caso particular del anterior)
- $sen(f(x)) \quad \rightarrow \quad \cos(f(x)) f'(x)$
- $\cos(f(x)) \quad \rightarrow \quad -sen(f(x)) f'(x)$
- $tg(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{\cos(f(x))^2} f'(x)$ ó $[1+tg(f(x))^2] f'(x)$
- $arcsen(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x)$
- $\arccos(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} f'(x)$
- $arctg(f(x)) \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{1+f(x)^2} f'(x)$

2.7.6. Aplicaciones de la derivada

Análisis de una función: crecimiento y decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos relativos, máximos y mínimos absolutos

Teoremas de valor medio: teoremas de Rolle y Lagrange, una aplicación del teorema de

Rolle, una aplicación del teorema de Lagrange

Polinomios de Taylor: teorema de Taylor, aplicación al cálculo de límites

Método de Newton

2.8. Representación gráfica

2.8.1. Puntos de corte

Con el eje de abscisas (*X*): Se resuelve la ecuación $f(x)=0$ y se obtienen los puntos (*x,*0)

Con el eje de ordenadas (*Y*): Se calculan $f(0)=y$ y se obtienen los puntos (*0,*y)

2.8.2. Asíntotas

Verticales: Si en la función hay un cociente, estas asíntotas estarían en los puntos donde el denominador se anula. La recta $x=c$ es una asíntota vertical si alguno de los límites siguientes no es finito

$$lím_{x\to c^-} f(x) \quad \text{y} \quad lím_{x\to c^+} f(x)$$

Horizontales: Hay una asíntota horizontal de ecuación $y=c$ si existe (es finito)

$$lím_{x\to -\infty} f(x)=c_1 \quad \text{y} \quad lím_{x\to +\infty} f(x)=c_2$$

Oblicuas: Son rectas $y=mx+n$, si *m* existe (es finito)

$$m_1=lím_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n_1=lím_{x\to -\infty}[f(x)-m_1 x]$$

$$m_2=lím_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n_2=lím_{x\to +\infty}[f(x)-m_2 x]$$

2.8.3. Crecimiento y decrecimiento

La información está contenida en $f'(x)$

- La función crece para los valores de *x* tales que $f'(x)>0$
- La función decrece para los valores de *x* tales que $f'(x)<0$
- Los puntos donde $f'(x)=0$ se llaman *extremos*

Esta información sirve como orientación sobre dónde están los mínimos y los máximos

2.8.4. Concavidad y convexidad

La información está contenida en $f''(x)$

- La función es cóncava para los valores de *x* tales que $f''(x)<0$
- La función es convexa para los valores de *x* tales que $f''(x)>0$
- La función tiene *puntos de inflexión* donde $f''(x)=0$

2.8.5. Extremos relativos: mínimos y máximos relativos

Hay que buscarlos entre los *puntos críticos* (para los que la información de $f'(x)$ fue usada). Ahora la información necesaria está contenida en $f''(x)$, que informa de si el punto está en un tramo de convexidad (y es un mínimo) o de concavidad (y es un máximo):

- Un extremo es un *mínimo* (relativo o local) si $f''(x_0)>0$
- Un extremo es un *máximo* (relativo o local) si $f''(x_0)<0$
- Un extremo es un *punto de inflexión* si $f''(x_0)=0$

2.8.6. Extremos absolutos

Para una función continua definida en un compacto (cerrado y acotado), estos extremos (que existen por el teorema de Weierstrass) están entre:

(1) Los puntos interiores donde alguna derivada parcial no existe
(2) Los puntos interiores donde existen y se anula $f'(x)$ (*puntos críticos*)
(3) Puntos de la frontera (hay que calcular sus imágenes directamente)

2.9. Integrales indefinidas

2.9.1. Propiedades

- Suma: $\int [f(x)+g(x)+\cdots]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx+\cdots$
- Resta: $\int [f(x)-g(x)-\cdots]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx-\cdots$
- Producto por un escalar: $\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$

2.9.2 Método de integración inmediata

Este método se aplica cuando se observa directamente que el integrando es la derivada de alguna función de las tablas de derivación. A veces es necesario ajustar alguna constante, para lo cual son útiles los siguientes «trucos», que se utilizan mucho en Matemáticas: se puede sumar y restar una misma cantidad (lo que equivale a sumar cero) o multiplicar y dividir por una misma cantidad (lo que equivale a multiplicar por uno). Se puede utilizar una tabla de integrales, pero quizá es más interesante memorizar la de derivadas y aprender a ajustar las constantes.

2.9.3. Método de cambio de variable

Este método se aplica cuando alguna sustitución, cuando se escribe todo en función de otra variable, ayuda a simplificar la integral original o a obtener alguna de los otros tipos.

- Si hay un factor $f(x)$ y otro $f'(x)$ (éste en el numerador), suele ser interesante tomar $t=f(x)$
- Si hay un factor $\sqrt{f(x)}$, suele ser interesante probar el cambio $f(x)=t^2$, es decir, $t=\sqrt{f(x)}$; no obstante, según el punto anterior, si aparece $f'(x)$ (en el numerador) puede ser conveniente aplicar el cambio $t=f(x)$
- Si hay único factor no polinómico, por ejemplo, e^x, al aplicar $t=e^x$ puede

convertirse en una integral de tipo racional

- Si la integral contiene $\sqrt{a^2-x^2}$ se suele probar $x=a\,sen(t)$, para que se cumpla que $\sqrt{a^2-a^2 sen(t)^2}=a\cos(t)$
- Si la integral contiene $\sqrt{x^2-a^2}$ se suele probar $x=a\cos(t)^{-1}$, para que se cumpla que $\sqrt{a^2\cos(t)^{-2}-a^2}=a\cos(t)^{-1}\sqrt{1-\cos(t)^2}=a\,tg(t)$
- Si la integral contiene $\sqrt{x^2+a^2}$ se suele probar $x=a\,tg(t)$, para que se cumpla que $\sqrt{a^2 tg(t)^2+a^2}=a\sqrt{sen(t)^2\cos(t)^{-2}+\cos(t)^2\cos(t)^{-2}}=a\cos(t)^{-1}$
- Si la integral contiene $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es conveniente mirar si en el numerador está (o se puede ajustar) la derivada del polinomio. En otro caso, cuando aparezca $\sqrt{ax^2+bx+c}$ puede ser conveniente completar cuadrados en el interior, para llegar a algo como $\sqrt{(\sqrt{a}x+d)^2-e}$, si *a* es positivo, ó $\sqrt{e-(\sqrt{|a|}x+d)^2}$, si *a* es negativo; después se mira si es posible completar el numerador para obtener algo de la forma arcoseno o arcocoseno, o, por otro lado, se puede aplicar alguno de los cambios trigonométricos anteriores
- En integrales con términos trigonométricos, si aparece $sen(x)^n$ con *n* impar conviene probar $t=\cos(x)$. Si aparece $\cos(x)^n$ con *n* impar conviene probar $t=sen(x)$. Si aparecen $sen(x)^n$ y $\cos(x)^m$ con ambos exponentes pares o ambos impares, conviene probar $t=tg(x)$. El cambio $t=tg(\frac{x}{2})$ suele funcionar en todas las integrales trigonométricas, pero también puede llevar a integrales más complicadas
- Hay cambios específicos para las funciones hiperbólicas

Una vez resuelta la integral en función de la variable *t*, hay que deshacer el cambio de variable para dejar el resultado en función de *x*.

Nota: En ocasiones se ven integrales resueltas como

$$\int x^2 e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}3x^2dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)=\frac{1}{3}e^{x^3}+c\,.$$

Este método, llamado de *introducción bajo el signo de la diferencial*, es equivalente al del cambio de variable, por lo que no suele estudiarse, ya que hace falta ver algo de diferenciales. Quien tenga interés, puede consultar

http://www.Casado-D.org/edu/NotacionesCalculoDiferencial.pdf

2.9.4. Método de integración por partes

Este método se aplica cuando el integrando es el producto de dos funciones que no tienen mucha relación entre sí: una exponencial con un polinomio, una trigonométrica con un polinomio, una exponencial con una trigonométrica, etcétera. Son de este tipo $\int x\cdot e^{ax}dx$, $\int x\cdot sen(ax)dx$ y $\int x\cdot\cos(ax)dx$, por ejemplo.

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

A la hora de decidir quién es *u* y quién *v*', conviene pensar qué parte del integrando se simplifica más al derivarlo. Por ejemplo: los polinomios se simplifican con la derivación, que proporciona un polinomio de un grado menos, y se complican con la integración; las funciones exponencial o trigonométricas da igual derivarlas que integrarlas. Por estos motivos, a veces es necesario aplicar *n* veces consecutivas la integración por partes, porque el polinomio tenga grado *n*: por ejemplo en $\int x^n\cdot e^{ax}dx$, $\int x^n\cdot sen(ax)dx$ y $\int x^n\cdot\cos(ax)dx$. Otras veces, hay una función que no se simplifica ni complica, pero están las funciones *sen*(*x*), *cos*(*x*) y e^x, que vuelven a aparecer al derivarlas dos veces; en estos casos se aplica el método 2 veces: $\int e^{ax} \cdot sen(bx)\,dx$ y $\int e^{ax} \cdot \cos(bx)\,dx$.

Nota: Si al aplicar esta fórmula la integral del segundo miembro es más complicada que la integral inicial, volvemos hacia atrás e intercambiamos los nombres de las dos funciones.

Nota: Hay casos en que se puede aplicar el método cuando hay sólo una función en el integrando; en este caso se considera *v'(x) = 1*.

Nota: Para recordar esa fórmula se puede tener en cuenta que

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - u'(x) \cdot v(x)$$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = \int [u(x) \cdot v(x)]'\,dx - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

Ejemplo. Vamos a resolver la complicada integral $\int x \cdot \cos(x) \cdot e^x\,dx$. Para las dos últimas funciones del integrando, cualitativamente da igual derivar que integrar, mientras que el polinomio se simplifica. Así, elegimos $u = x$.

$$\int x \cdot \cos(x) \cdot e^x\,dx =$$

- $u = x \quad \rightarrow \quad u' = 1$
- $v' = \cos(x) e^x \quad \rightarrow \quad v = \int \cos(x) e^x\,dx = \frac{1}{2} e^x [\cos(x) + sen(x)]$

  Esta segunda integral, hay que resolverla a su vez por partes, y aplicando el método dos veces consecutivas:

  $$v = \int \cos(x) e^x\,dx = \cos(x) e^x - \int [-sen(x)] e^x\,dx = \cos(x) e^x + \int sen(x) e^x\,dx$$

  $$= \cos(x) e^x + sen(x) e^x - \int \cos(x) e^x\,dx = \cos(x) e^x + sen(x) e^x - v$$

  - $f_1 = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f_1' = -sen(x)$
  - $g_1' = e^x \quad \rightarrow \quad g_1 = e^x$
  - $f_2 = sen(x) \quad \rightarrow \quad f_2' = \cos(x)$
  - $g_2' = e^x \quad \rightarrow \quad g_2 = e^x$

  De la anterior igualdad se deducen dos cosas que se utilizan en la integral original: $v - \cos(x) e^x = \int sen(x) e^x\,dx$ y $2\mathrm{v} = \cos(x) e^x + sen(x) e^x$

$$\int x \cdot \cos(x) \cdot e^x\,dx = \frac{x}{2} e^x [\cos(x) + sen(x)] - \frac{1}{2} \int e^x [\cos(x) + sen(x)]\,dx =$$

$$= \frac{x}{2} e^x [\cos(x) + sen(x)] - \frac{1}{2} [2\mathrm{v} - \cos(x) e^x] =$$

$$= \frac{x}{2} e^x [\cos(x) + sen(x)] - \frac{1}{2} [\cos(x) e^x + sen(x) e^x - \cos(x) e^x] =$$

$$= \frac{x}{2} e^x [\cos(x) + sen(x)] - \frac{1}{2} sen(x) e^x = \frac{e^x}{2} [x \cdot \cos(x) + x \cdot sen(x) - sen(x)]$$

2.9.5. Integración de funciones racionales

Este método se aplica cuando el integrando es cociente de dos polinomios. Según sean los grados de estos polinomios se distinguen varios casos:

- Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, se hallan las raíces del denominador y se mira si son simples o múltiples (aparecen varias veces) y si son reales y complejas. Luego se hace:

a) Si el numerador es casi la derivada del denominador, pero falta alguna constante, se puede completar el numerador para que aparezca

b) El denominador sólo tiene dos raíces complejas: b.1) si el numerador es una constante, se opera con el denominador (completando cuadrados) hasta convertir el integrando en algo de la forma arcotangente; b.2) si el numerador contiene a la variable x, se puede completar el numerador con lo que falte para descomponer la integral en una del tipo a) y otra del tipo b.1)

c) El denominador sólo tiene dos raíces complejas dentro de una raíz cuadrada: c.1) si el numerador es una constante, se opera con el denominador (completando cuadrados) hasta convertir el integrando en algo de la forma arcoseno o arcocoseno; c.2) si el numerador contiene a la variable x, se puede completar el numerador con lo que falte para descomponer la integral en una en que el numerador es la derivada del radicando del denominador y otra del tipo c.1)

d) En general, se descompone el integrando en una suma de fracciones de la siguiente forma

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-r_1)(x-r_2)^3(x^2+mx+n)}$$
$$=\frac{A}{x-r_1}+\frac{B}{x-r_2}+\frac{C}{(x-r_2)^2}+\frac{D}{(x-r_2)^3}+\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}$$

donde r_1 es una raíz real simple, r_2 una raíz real múltiple (triple) y en el último término hay dos raíces reales conjugadas (si fuesen múltiples, se haría lo mismo que con las múltiples reales: una fracción para cada exponente). Después se vuelven a unir las fracciones utilizando su mínimo común múltiplo y se calculan A, B, C, D, M y N al igualar los numeradores de la primera y la última expresiones. Una vez calculados, se tiene que

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\frac{A}{x-r_1}dx+\int\frac{B}{x-r_2}dx+\cdots+\int\frac{Mx+N}{x^2+mx+n}dx$$

- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se hace la división de polinomios y se llega a que:

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

de donde

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\cancel{q(x)}\cdot c(x)}{\cancel{q(x)}}+\frac{r(x)}{q(x)}$$

y, finalmente,

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int c(x)dx+\int\frac{r(x)}{q(x)}dx$$

La primera integral es fácil. La segunda pertenece a las racionales del punto anterior, porque en una división de polinomios el resto tiene que tener siempre grado menor al del divisor.

- Por último, si el grado del numerador es igual al del denominador, se completa el numerador de modo que la integral queda dividida en una inmediata y otra racional con el grado del numerador menor que el del denominador. Por ejemplo,

$$\frac{x^3+x}{x^3+ax^2+bx+c}=\frac{x^3+ax^2+bx+c-ax^2-(b-1)x-c}{x^3+ax^2+bx+c}$$

de donde

$$\int\frac{x^3+x}{x^3+ax^2+bx+c}dx=\int\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x^3+ax^2+bx+c}dx-\int\frac{ax^2+(b-1)x+c}{x^3+ax^2+bx+c}dx$$

2.9.6. Algunas integrales «con truco»

Truco: Sumar y restar un uno

$$\int tg(x)^2\,dx=\int tg(x)^2+1-1\,dx=\int tg(x)^2+1\,dx-\int dx=tg(x)-x+c$$

Truco: Escribir de otra forma

$$\int tg(x)\,dx=\int\frac{sen(x)}{\cos(x)}dx=-\int\frac{-sen(x)}{\cos(x)}dx=-\ln(\cos(x))+c$$

$$\int\frac{1}{tg(x)}dx=\int\frac{\cos(x)}{sen(x)}dx=\ln(sen(x))+c$$

Truco: Integrar por partes con 1

$$\int\ln(x)dx=\ln(x)\cdot x-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx=\ln(x)\cdot x-x=x\cdot[\ln(x)-1]+c,$$

donde se han elegido $u(x)=\ln(x)$ y $v'(x)=1$ para integrar por partes

Truco: Utilizar fórmulas trigonométricas

Como

$$\left\{\begin{array}{c}\cos(x)^2+sen(x)^2=1\\ \cos(x)^2-sen(x)^2=\cos(2\mathrm{x})\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l}\cos(x)^2=\frac{1}{2}(1+\cos(2\mathrm{x}))\\ sen(x)^2=\frac{1}{2}(1-\cos(2\mathrm{x}))\end{array}\right.$$

entonces

$$\int\cos(x)^2\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sen(2\mathrm{x})\right)+c \quad \text{y} \quad \int sen(x)^2dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}sen(2\mathrm{x})\right)+c$$

2.10. Integrales definidas propias

2.10.1. Función integrable según Riemann

2.10.2. Propiedades

- $\int_a^b[f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$

- $\int_a^b k\,dx = k\cdot(b-a)$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, si $a < c < b$

2.10.3. *Primer teorema fundamental del cálculo integral*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

2.10.4. *Segundo teorema fundamental del cálculo integral* o *regla de Barrow*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2.10.5. Cálculo de áreas (es necesario que se corrija el signo que la integral definida asigna)

Área debajo de una función positiva = $\int_a^b f(x)\,dx$

Área encima de una función negativa = $-\int_a^b f(x)\,dx$

Área encerrada por una función que pasa de ser positiva a negativa = $\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$ (en c cambia)

Área encerrada entre dos funciones = $\int_a^c g(x) - f(x)\,dx$, si *g(x)* es mayor que *f(x)* (si es necesario, se divide el cálculo en varios intervalos y en cada uno se le resta la función menor a la mayor. No es necesario tener en cuenta si cortan al eje horizontal o no)

Área de una superficie generada al girar una gráfica alrededor del eje de abscisas = $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

2.10.6. Cálculo de la longitud de arco

Longitud de una curva $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ = $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

Longitud de una gráfica $\sigma(x) = (x, f(x))$ = $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

2.10.7. Cálculo de volúmenes

Volumen cuyas secciones son $A(x) = \int_a^b A(x)\,dx$ (*Método de Cavalieri*)

Volumen del sólido obtenido al girar una gráfica alrededor del eje de abscisas = $\int_a^b \pi f(x)^2\,dx$ (*Método de los* discos [pensar en el método anterior])

Volumen del sólido obtenido al girar una gráfica alrededor del eje de ordenadas = $\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$ (pensar en cortezas cilíndricas de radio *x* y altura *f(x)*)

2.11. Integrales definidas impropias

2.11.1. De intervalo no acotado

2.11.2. De función no acotada

2.12. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Véase el documento http://www.Casado-D.org/edu/NotasEcuacionesDiferenciales.pdf

3. Funciones de varias variables

3.1. Dominio

Son los valores $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que pueden tomar las variables independientes. Los puntos que con más frecuencia hay que excluir, son:

- En un cociente, el denominador no puede ser nulo
- Una raíz de orden par (cuadrada, cuarta, sexta, etc.) sólo se puede aplicar (con números reales) a una cantidad no negativa
- Un logaritmo (de cualquier base) sólo se puede aplicar (con números reales) a una cantidad positiva

3.2. Representación gráfica

3.2.1. Curvas y superficies de nivel:

Curvas de nivel $C_k = \{\boldsymbol{x} \in R^2 \mid f(\boldsymbol{x}) = k\}$

Superficies de nivel $S_k = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = k\}$

3.3. Límites reiterados y direccionales

Límites reiterados (para $n = 2$) $lím_{x_1 \to a_1} lím_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$ y $lím_{x_2 \to a_2} lím_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2)$

Límites direccionales $lím_{\lambda \to 0} f(\boldsymbol{x} + \lambda \vec{v})$

Nota: En estos límites hay una única variable, por lo que es aplicable todo lo visto sobre límites para funciones de una variable

3.4. Continuidad

Una función es <u>continua</u> en un punto $\boldsymbol{a}$ si existe en ese punto, existen todos los límites y todos estos valores anteriores coinciden.

$$lím_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

Para estudiar la continuidad, no es posible analizar las infinitas formas de aproximarse a un punto, por lo que el estudio se suele restringir a los límites reiterados y a los direccionales (son un caso particular de límites restringidos). Por tanto:

- Si los límites reiterados no coinciden o los límites direccionales dependen de la dirección, la función no es continua en el punto.
- Pero si los límites direccionales coinciden y todos los límites direccionales también, todavía no puede afirmarse que la función sea continua, puesto que los límites direccionales sólo analizan una parte de las infinitas formas de aproximarse al punto donde se estudia la continuidad.
- Sin embargo, hay una situación concreta en que se puede calcular el límite, aun cuando todos los anteriores límites coincidan. Se trata de la situación en que hay un producto de una función acotada (en el entorno del punto) por otra que tiende a cero (infinitésima):

$$\left\{ \begin{array}{l} lím_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ |f_2(\boldsymbol{x})| \leq cte \ \forall \ \boldsymbol{x} \in E(\boldsymbol{a}) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad lím_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f_1(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x}) = 0$$

  Como ejemplo, tras comprobar que los límites iterados y direccionales son todos iguales a 0, podemos calcular el límite haciendo:

$$lím_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{x_1 sen(x_1^2 x_2)}{1 + x_2^2} = lím_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{x_1}{1 + x_2^2} \cdot sen(x_1^2 x_2) = 0 .$$

De este modo, un posible esquema para estudiar la continuidad es:

1. Estudiar los límites reiterados. Si son distintos, no hay continuidad; si son iguales, pasar al siguiente punto.
2. Estudiar los límites direccionales. Si dependen de la dirección, no hay continuidad; si no dependen de ella, pasar al siguiente punto.
3. Comprobar si la función $f(\boldsymbol{x})$ puede escribirse como producto de una función acotada por otra infinitésima $f(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{x})$, ya que en este caso el límite es 0.
4. Si no es posible esta descomposición, en general no podemos saber si hay continuidad.

Respecto al cálculo de los límites direccionales, como podemos ver en su expresión el límite sólo contiene la variable λ, por lo que se resuelven como los límites de una variable. En primer lugar intentamos sustituir directamente el valor al que tiende λ en la expresión de la función. Sólo en el caso en el que se obtenga alguna indeterminación se pasa a utilizar los métodos vistos para ellas.

Tipos de discontinuidades: evitables (cuando lo límites coinciden pero no coinciden con el valor de la función) o inevitables (cuando los límites no coinciden entre sí), estas últimas pueden ser de salto finito (la diferencia entre los límites es finita) o infinito (si no).

Comportamiento asintótico: direcciones en que el denominador del límite direccional se anula

3.5. Derivadas direccionales y parciales

Derivada direccional $f'_{\vec{v}}(\boldsymbol{x})=lím_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}+\lambda\vec{v})-f(\boldsymbol{x})}{\lambda}=\cdots=\nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\vec{v}$

Derivada parcial $f'_{\vec{e}_i}(\boldsymbol{x})=lím_{\lambda\to 0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}+\lambda\vec{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{\lambda}=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$ (caso particular del anterior)

3.6. Matrices de derivadas parciales. Vector gradiente y matriz jacobiana

3.6.1. Vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)$

3.6.2. Matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

3.7. Diferenciabilidad

Insuficiencia de la derivabilidad: que una función sea derivable en todas las direcciones no implica que sea diferenciable

3.7.1. Matriz hessiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1\partial x_n} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Condición suficiente de diferenciabilidad. Funciones de clase C^1, C^2, ... Teoremas de Schwartz

3.8. Plano tangente (n = 2) a la superficie $f(x_1,x_2)$ en el punto (a_1,a_2)

En $\mathbb{R}^3$, sea $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, con $a_3=f(a_1,a_2)$, el plano se compone del conjunto de puntos $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ tales que

$$\vec{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}}\cdot\vec{v}=0,$$

donde $\vec{v}$ es un vector perpendicular al plano. Para deducir la expresión del plano, es necesario construir los vectores de la anterior expresión.

- $\vec{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}}=(x_1-a_1, x_2-a_2, x_3-a_3)$
- Las derivadas parciales $f_{x_1}(\boldsymbol{a})$ y $f_{x_2}(\boldsymbol{a})$ proporcionan dos vectores contenidos en el plano buscado: $(1,0,f_{x_1}(\boldsymbol{a}))$ y $(0,1,f_{x_2}(\boldsymbol{a}))$. Por tanto, para obtener un vector perpendicular a los dos, y, por tanto, al plano, se utiliza el producto vectorial. Así se obtiene
$$\vec{v}=(1,0,f_{x_1}(\boldsymbol{a}))x(0,1,f_{x_2}(\boldsymbol{a}))=(-f_{x_1}(\boldsymbol{a}),-f_{x_2}(\boldsymbol{a}),1).$$

Con estos ingredientes, la ecuación del plano es

$$(x_1-a_1, x_2-a_2, x_3-a_3)\cdot(-f_{x_1}(\boldsymbol{a}),-f_{x_2}(\boldsymbol{a}),1)=0,$$

que se escriben como

$$x_3-a_3=(x_1-a_1)f_{x_1}(\boldsymbol{a})+(x_2-a_2)f_{x_2}(\boldsymbol{a})$$

3.9. Recta perpendicular (n = 2) a la superficie $f(x_1, x_2)$ en el punto (a_1, a_2)

En $\mathbb{R}^3$, sea $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, con $a_3=f(a_1, a_2)$, la recta se compone del conjunto de puntos $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$ generados dando valores al parámetro *t*, donde

$$\vec{\boldsymbol{0}\boldsymbol{a}}+t\vec{v}=\vec{\boldsymbol{0}\boldsymbol{x}},$$

donde $\vec{v}$ es un vector perpendicular al plano. Para deducir la expresión de la recta, es necesario construir los vectores de la anterior expresión.

- $\vec{\boldsymbol{0}\boldsymbol{a}}=(a_1, a_2, a_3)$
- Las derivadas parciales $f_{x_1}(\boldsymbol{a})$ y $f_{x_2}(\boldsymbol{a})$ proporcionan dos vectores contenidos en el plano buscado: $(1,0,f_{x_1}(\boldsymbol{a}))$ y $(0,1,f_{x_2}(\boldsymbol{a}))$. Por tanto, para obtener un vector perpendicular a los dos, y, por tanto, al plano, se utiliza el producto vectorial. Así se obtiene
$$\vec{v}=(1,0,f_{x_1}(\boldsymbol{a}))x(0,1,f_{x_2}(\boldsymbol{a}))=(-f_{x_1}(\boldsymbol{a}),-f_{x_2}(\boldsymbol{a}),1).$$
- $\vec{\boldsymbol{0}\boldsymbol{x}}=(x_1, x_2, x_3)$

Con estos ingredientes, la ecuación de la recta es

$$(a_1, a_2, a_3)+t(-f_{x_1}(\boldsymbol{a}),-f_{x_2}(\boldsymbol{a}),1)=(x_1, x_2, x_3)$$

que implican las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1=a_1-tf_{x_1}(\boldsymbol{a}) \\ x_2=a_2-tf_{x_2}(\boldsymbol{a}) \\ x_3=a_3+t \end{cases}$$

De este tipo de ecuaciones de la recta se pueden obtener los demás tipos.

Nota: También se podría haber utilizado el vector $-\vec{v}=(f_{x_1}(\boldsymbol{a}), f_{x_2}(\boldsymbol{a}),-1)$, lo que llevaría a ecuaciones equivalentes a las anteriores.

3.10. Extremos de funciones de varias variables

3.10.1. Extremos relativos

Se utilizan las derivadas direccionales para ver el comportamiento de la función en un punto en una dirección:

- Si $f'_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}>0$ la función es creciente en $\boldsymbol{a}$ en la dirección de $\vec{v}$
- Si $f'_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}<0$ la función es decreciente en $\boldsymbol{a}$ en la dirección de $\vec{v}$
- Si $f'_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\nabla f(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}=0$ la función ni crece ni decrece en $\boldsymbol{a}$ en la dirección de $\vec{v}$

Con las primeras derivadas, recogidas en el gradiente, se obtienen los *puntos críticos*

- Si $\nabla f(\boldsymbol{a})=0$ hay un punto crítico en $\boldsymbol{a}$, que puede ser un máximo, un mínimo o un punto de silla

Con las segundas derivadas, recogidas en la matriz hessiana, se tiene que

- Si la forma cuadrática $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es definida positiva, la función es convexa o acelerada en el punto $\boldsymbol{a}$
- Si $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es definida negativa, la función es cóncava o decelerada en el punto $\boldsymbol{a}$
- Si $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es indefinida, la función tiene un punto de silla en el punto $\boldsymbol{a}$

Para estudiar los puntos críticos, se combina el gradiente con la hessiana:

- Si $\nabla f(\boldsymbol{a})=0$ y la forma cuadrática $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es definida positiva, el punto crítico $\boldsymbol{a}$ es un mínimo
- Si $\nabla f(\boldsymbol{a})=0$ y $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es definida negativa, el punto crítico $\boldsymbol{a}$ es un máximo
- Si $\nabla f(\boldsymbol{a})=0$ y $f''_{\vec{v}}(\boldsymbol{a})=\vec{v}^t\cdot Hf(\boldsymbol{a})\cdot\vec{v}$ es indefinida, el punto crítico $\boldsymbol{a}$ es un punto de silla

3.10.2. Extremos absolutos

Para una función continua definida en un compacto (cerrado y acotado), los puntos extremos están entre:

(1) Los puntos interiores donde alguna derivada parcial no existe
(2) Los puntos interiores donde existen y se anulan todas las derivadas parciales (*puntos críticos*)
(3) Puntos de la frontera $g(\boldsymbol{x})=0$. Estos valores hay que analizarlos de otro modo.
(a) O bien se utiliza la ecuación $g(\boldsymbol{x})=0$ para despejar algunas variables y sustituirlas en $f(\boldsymbol{x})$, de manera que se puedan calcular los extremos de la nueva función resultante, con menos variables.
(b) O se utiliza optimización con restricciones (véase el siguiente apartado):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=0\\ g(\boldsymbol{x})=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_i}=0\\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial\lambda}=0\end{cases},$$

donde se construye la *función lagrangiana*, con una variable más (el *multiplicador*)

$$L(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})+\lambda g(\boldsymbol{x}).$$

3.10.3. Optimización de funciones con restricciones de igualdad

Función lagrangiana $L(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})+\lambda[g(\boldsymbol{x})-b]$, si la restricción es $g(\boldsymbol{x})=b$. Se resuelve el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=0 \\ g(\boldsymbol{x})=b \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial x_i}=0 \\ \dfrac{\partial L(\boldsymbol{x},\lambda)}{\partial \lambda}=0 \end{cases}.$$

3.11. Fórmula de Taylor

3.12. Integrales dobles (n = 2)

3.12.1. Condiciones de integrabilidad

3.12.2. Integración reiterada

3.12.3. Cambio en el orden de integración

3.12.4. Cambio de variable

3.12.5. Regiones

De tipo I: Tienen la forma { $a \le x_1 \le b$, $f(x_1) \le x_2 \le g(x_1)$ }. Hay que integrar primero respecto a la variable x_2 y luego respecto a x_1, es decir:

$$\iint_R f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_a^b \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

De tipo II: Tienen la forma { $h(x_2) \le x_1 \le k(x_2)$, $c \le x_2 \le d$ }. Hay que integrar primero respecto a la variable x_1 y luego respecto a x_2; es decir:

$$\iint_R f(x_1, x_2)dxdy = \int_c^d \int_{h(x_2)}^{k(x_2)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

De tipo III: Son a la vez de tipo I y de tipo II, es decir, pueden escribirse indistintamente como { $a \le x_1 \le b$, $f(x_1) \le x_2 \le g(x_1)$ } ó { $h(x_2) \le x_1 \le k(x_2)$, $c \le x_2 \le d$ }, por lo que:

$$\iint_R f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = \int_a^b \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_c^d \int_{h(x_2)}^{k(x_2)} f(x_1, x_2)dx_1\, dx_2$$

Al tener dos formas de calcular la integral, es interesante elegir la que más convenga. La técnica de cambiar una forma por otra se llama *cambio en el orden de integración*.

3.12.6. Cálculo de áreas

Área de una región $R = \iint_R dx_1 dx_2$

Área de una superficie $f(x_1, x_2)$ sobre $R = \iint_R \sqrt{1+f_{x_1}(x_1, x_2)^2+f_{x_2}(x_1, x_2)^2}\, dx_1 dx_2$

Nota: Se puede pensar en el vector $\vec{v}=(1,0,f_{x_1}(\boldsymbol{a}))x(0,1,f_{x_2}(\boldsymbol{a}))=(-f_{x_1}(\boldsymbol{a}),-f_{x_2}(\boldsymbol{a}),1)$ definido más arriba; este vector permite escribir un diferencial de área como $dS=|\vec{v}|\,dx_1 dx_2$, ya que el producto vectorial calcula el área de un paralelogramo; después, el área buscada es $\iint_R dS\, dx_1 dx_2$.

3.12.7. Cálculo de volúmenes

Volumen encerrado bajo $f(x_{1,} x_2) = \iint_R f(x_{1,} x_2) dx_1 dx_2$

Volumen encerrado en la región $V = \iiint_V dx_1 dx_2 dx_3$

A. Apéndice

A.1. Notación en el Cálculo Diferencial

El lector interesado en las notaciones más frecuentes que se suelen utilizar para las derivadas y los diferenciales clásicos, puede consultar http://www.Casado-D.org/edu/NotacionesCalculoDiferencial.pdf

Universidad Complutense de Madrid
∟ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
∟ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II
∟ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012