



# Notas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

## 1. Introducción

## 2. Espacios de soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales

## 3. Resolución de ecuaciones: de la ecuación diferencial a la función

### 3.1. Ecuaciones de orden 1

#### 3.1.1. De grado 1 en $y'$

- 3.1.1.1. Método para resolver ecuaciones lineales
- 3.1.1.2. Método para resolver ecuaciones de variables separadas
- 3.1.1.3. Método para resolver ecuaciones homogéneas
- 3.1.1.4. Método para resolver ecuaciones reducibles a homogéneas
- 3.1.1.5. Método para resolver ecuaciones exactas
- 3.1.1.6. Método para resolver ecuaciones de factor integrante
- 3.1.1.7. Método para resolver la ecuación de Bernoulli
- 3.1.1.8. Método para resolver la ecuación de Ricatti, cuando se conoce alguna solución

#### 3.1.2. De grado $m$ en $y'$

- 3.1.2.1. Método para resolver ecuaciones polinomiales
- 3.1.2.2. Método para resolver ecuaciones de la forma  $F(y, y') = 0$
- 3.1.2.3. Método para resolver ecuaciones de la forma  $F(x, y') = 0$
- 3.1.2.4. Método para resolver la ecuación de Lagrange (y la de Clairaut)

### 3.2. Ecuaciones de orden $n$

#### 3.2.1. De grado 1 en $y^{(n)}$

- 3.2.1.1. Método para resolver ecuaciones lineales completas del tipo  $y^{(n)} = f(x)$
- 3.2.1.2. Método para resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes
- 3.2.1.3. Métodos para resolver ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes
  - 3.2.1.3.1. Método de variación de las constantes
  - 3.2.1.3.2. Método de los coeficientes indeterminados
  - 3.2.1.3.3. Método operacional
  - 3.2.1.3.4. Otros métodos
    - 3.2.1.3.4.1. Método de representación en serie de potencias
    - 3.2.1.3.4.2. Método de la transformada de Laplace
- 3.2.1.4. Métodos para resolver ecuaciones lineales completas con coeficientes no constantes
  - 3.2.1.4.1. Método de representación en serie de potencias
  - 3.2.1.4.2. Método de la transformada de Laplace
  - 3.2.1.4.3. Otros métodos
    - 3.2.1.4.3.1. Método de variación de las constantes
    - 3.2.1.4.3.2. Método de los coeficientes indeterminados
    - 3.2.1.4.3.3. Método operacional
  - 3.2.1.4.4. Método para calcular una solución conocida otra (caso  $n = 2$ )
- 3.2.1.5. Método para resolver la ecuación lineal completa de coeficientes no constantes de Euler o Cauchy
- 3.2.1.6. Método para resolver la ecuación lineal completa de coeficientes no constantes de Legendre
- 3.2.1.7. Método para, conocida una solución, reducir el orden de una ecuación lineal homogénea de coeficientes no constantes

#### 3.2.2. De grado $m$ en $y^{(n)}$

- 3.2.2.1. Método para reducir el orden en las ecuaciones del tipo  $F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$
- 3.2.2.2. Método para reducir el orden en las ecuaciones del tipo  $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$
- 3.2.2.3. Método para reducir el orden en ecuaciones homogéneas en  $y, y', \dots$
- 3.2.2.4. Método para reducir el orden en ecuaciones homogéneas en  $x, y, dx, dy, d^2x, \dots$

## 4. Búsqueda de ecuaciones: de la función a la ecuación diferencial

## 5. Familias ortogonales de funciones (caso $n = 1$ )

### A. Apéndices

#### A.1 Sobre la adición de una constante al resolver cada integral indefinida

#### A.2 Algunas observaciones generales

#### A.3 Notaciones en el Cálculo Diferencial

# 1. Introducción

Una ecuación diferencial es una igualdad matemática que relaciona funciones, sus derivadas, variables y constantes. Normalmente aparece una sola función (varias, por ejemplo, en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales) y una variable de la cual depende esa función, aunque en ocasiones esta jerarquía de variables independientes y dependientes (funciones) puede ser elegida según convenga. Las ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales, aparecen en muchas disciplinas, por ejemplo en Física, Química, Biología, Ingeniería y Economía: circuitos eléctricos, ecuaciones de onda, procesos de disolución, movimiento en fluidos resistentes, procesos de enfriamiento, desintegración radiactiva, etcétera (se pueden consultar el texto «Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales», de Gloria Aguilar, Natalia Boal, Carmelo Clavero y Francisco Gaspar, disponible en [www.unizar.es/pde/fjgaspar/Aplicaciones.pdf](http://www.unizar.es/pde/fjgaspar/Aplicaciones.pdf), o el libro *Ecuaciones diferenciales en la práctica*, de V. V. Amelkin, de la editorial URSS). Una ecuación diferencial se dice *ordinaria* cuando las derivadas son ordinarias, no derivadas parciales. Casi siempre,  $x$  será la variable independiente e  $y$  la dependiente o función, por lo que la ecuación más general tomará la forma

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})=0 \quad (1)$$

(Se denotará la  $n$ -ésima derivada con  $y^{(n)}$ , aunque se utilice también  $y'$  y  $y''$  para las dos primeras.)

El *orden* de la ecuación diferencial es el de la derivada más alta que aparece en ella, mientras que el *grado* de la ecuación es el exponente más alto al que está elevada alguna de estas derivadas, o la suma de los exponentes, en caso de que haya productos de la función y sus derivadas. Se llama *solución particular* de una ecuación diferencial a cualquier función que la verifica, y se llama *solución general* de una ecuación diferencial a la fórmula o expresión, implícita o explícita, que representa (porque queda en función de constantes o parámetros) a todas las posibles soluciones particulares:

$$f(x, y, c_1, \dots, c_n)=0 \quad \text{ó} \quad y=f(x, c_1, \dots, c_n).$$

A la gráfica de una solución se le llama *curva integral*. Las *condiciones iniciales* son condiciones que verifican la función solución o alguna de sus derivadas, y que permiten, una vez obtenida la solución general, mediante el sistema

$$\begin{cases} y=f(x, c_1, \dots, c_n) \\ y^{(1)}=f^{(1)}(x, c_1, \dots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x, c_1, \dots, c_n) \end{cases}$$

encontrar la solución particular que las verifica, es decir, los valores de los parámetros  $c_1, \dots, c_n$ .

En general, aunque no siempre, la ecuación (1) puede escribirse como

$$G(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})=g(x) \quad (2)$$

A esta forma se la llama *ecuación completa*, mientras que la *ecuación homogénea* asociada es

$$G(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})=0 \quad (3)$$

El dominio en que una ecuación –y por tanto su solución– tiene sentido depende de las distintas expresiones o partes involucradas en ella. De ello dependen también la existencia y las características de las soluciones. En el mejor de los casos, estas expresiones y sus soluciones son *analíticas* o *indefinidamente derivables* en un entorno o en todo  $\mathbb{R}$ . Un punto  $x_0$  es *ordinario* si las expresiones  $f_k(x)$  que aparecen en la ecuación son analíticas en él; en este caso, con frecuencia las soluciones son también analíticas. Si alguna de estas expresiones no es analítica en  $x_0$ , este punto se dice *singular*. A su vez, los puntos singulares pueden ser de dos tipos. Un punto  $x_0$  es *singular regular* si  $(x-x_0)^k f_k(x)$  son analíticas en él, es decir, si tienen un «mal

comportamiento» comparable al de  $(x-x_0)^{-k}$ ; en otro caso,  $x_0$  es *singular irregular*. En los textos hay resultados teóricos sobre la existencia y características de las soluciones en los distintos tipos de puntos. Pese a que los puntos singulares son especialmente interesantes en alguna áreas, como la Física Matemática, nosotros vamos a resolver ecuaciones en entornos de puntos ordinarios. Como las funciones analíticas admiten un desarrollo en serie infinita, el método de representación en serie, que se verá en 3.2.1.4.1., es especialmente apropiado para resolver ecuaciones en puntos singulares regulares: para puntos singulares regulares los textos suelen incluir el método de Frobenius, que no se ha incluido aquí, dado que nos centramos en la parte más técnica de resolución de ecuaciones en los puntos con «buen comportamiento». Por otro lado, téngase en cuenta que una cosa es el dominio en que está definida una ecuación (intersección del de cada una de sus expresiones) y otra cosa es el dominio de validez de las posibles operaciones (por ejemplo dividir a toda la ecuación, para normalizarla, por una función  $h(x)$ , que debe ser no nula), de los posibles operadores (transformada de Laplace) y de los cambios de variable ( $x = e^t$   $> 0$ ) que podamos aplicar para su resolución (se han incluido comentarios sobre el dominio de validez en las secciones 3.2.1.4.1., 3.2.1.4.2., 3.2.1.5., 3.2.1.6.1. y 3.2.2.4.). Cuando ambos dominios no coinciden, puede ser que un método esté excluyendo soluciones válidas o esté incluyendo otras espurias (este segundo problema es más fácil de evitar, porque siempre es posible comprobar si cada solución verifica o no la ecuación diferencial). Un tipo particularmente importante de ecuaciones diferenciales, sobre todo en una primera aproximación a las ecuaciones diferenciales, son las *lineales*, que se definen en la siguiente sección. Para estas ecuaciones, hay resultados teóricos que informan del número de soluciones independientes que existen, lo que nos permite comprobar cuándo las hemos encontrado todas. Muchas ecuaciones interesantes de las ciencias son, sin embargo, no lineales. Cuando la ecuación diferencial tiene una interpretación (en Física, Biología...), hay que tenerla en cuenta a la hora de determinar la región válida de  $(x,y)$  y las soluciones aceptables. Así, hay tres tipos de restricciones para los dominios y soluciones aceptables: dos de carácter matemático, la propia ecuación y los métodos de resolución, y una de carácter aplicado, la interpretabilidad.

En general, las ecuaciones pueden clasificarse según varios criterios:

- (a) Por el orden: uno o superior
- (b) Por el grado: uno o superior
- (c) Por la linealidad: lineales o no lineales
- (d) Por características particulares: con coeficientes constantes o no constantes, de variables separables, homogéneas, de Bernouilli, exactas, de factor integrante, de Ricatti, etcétera.
- (e) Por la homogeneidad: homogéneas o completas

En general, como son criterios cualitativamente independientes y compatibles, se pueden combinar varios, y cada texto lo hace a su manera: por ejemplo, capítulos según el orden y dentro la diferenciación por el grado, o capítulos según el grado y dentro la diferenciación entre lineales y no lineales. Nótese, como caso concreto, que un grado 2 implica que la ecuación es no lineal, porque el cuadrado de la suma no es la suma de los cuadrados y porque lo mismo sucede con los productos de  $y$  y alguna de sus derivadas.

En este documento, después de esta **introducción** se mencionan algunos resultados teóricos sobre las soluciones de las **ecuaciones lineales**. En la siguiente sección, la más extensa e importante, se afronta la **resolución de ecuaciones** diferenciales ordinarias; se verán algunos métodos que son «herramientas matemáticas» disponibles para resolver muchas ecuaciones diferenciables, es decir, para calcular algunas soluciones particulares o la general: reordenar y reescribir la ecuación, aplicar un cambio de variable para convertirlas a otro tipo, calcular la solución general, calcular otra solución independiente a otras conocidas, buscar soluciones de cierta forma, calcular soluciones particulares, etcétera. De estos métodos anteriores, algunos son muy específicos y sirven sólo para un tipo de ecuación (por ejemplo, aplicar un cambio de variable), mientras que otros sirven para llevar a cabo tareas generales de todos los tipos de ecuaciones. Para organizar las ecuaciones y métodos, el orden de criterios seguido en este documento es considerar primero el orden, luego el grado de la derivada de orden mayor, luego la linealidad, luego la constancia de los coeficientes y, finalmente, otros criterios particulares. Aunque en la mayoría de casos el interés está en encontrar una función cualquiera (solución particular) o familia de funciones (solución general) de una ecuación diferencial de la forma (1), también tiene interés el problema inverso de, dada una función o

familia de funciones, **encontrar la ecuación diferencial** ordinaria que la caracteriza; esto es lo que se ve en la cuarta sección. Saber resolver ambos problemas tiene, entre otras muchas aplicaciones, la de permitir **encontrar la familia uniparamétrica de funciones perpendicular** a otra familia uniparamétrica dada (ambas contenidas en un plano): de la primera familia se obtiene la ecuación diferencial  $y'$ , dado que la ecuación diferencial de la familia perpendicular es aquella resultante de sustituir  $y'$  por  $-1/y'$ , la resolución de esta nueva ecuación lleva a la familia buscada; de esto trata la quinta y última sección.

Por otro lado, en este documento no se han incluido resultados de existencia y unicidad de soluciones, por ejemplo, ni el estudio cualitativo de las soluciones, ni las soluciones en los puntos singulares regulares, ni los sistemas de ecuaciones lineales, para los que, como combinación de varias ecuaciones que son, puede hablarse de orden, grado, linealidad, homogeneidad, constancia de los coeficientes, cambios de variable, métodos de resolución, soluciones particulares y homogéneas, espacio vectorial de soluciones de un sistema homogéneo, wronskiano (con una definición distinta a la de las ecuaciones lineales), solución general del sistema completo, etcétera; tampoco se han visto aplicaciones de las ecuaciones diferenciales. Estos temas, así como muchos de los métodos incluidos aquí, pueden consultarse, por ejemplo, en los libros *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*, de George F. Simmons, o *Ecuaciones diferenciales*, de Shepley L. Ross, publicados en español o castellano por las editoriales McGraw Hill y Reverté, respectivamente.



## 2. Espacios de soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales

Un tipo particularmente importante de ecuaciones diferenciales son las *lineales*. Estas ecuaciones son las que verifican

$$G(x, y_1 + y_2, y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, \dots, y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) = G(x, y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(n)}) + G(x, y_2, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(n)}) \quad (4)$$

Las ecuaciones lineales son importantes porque implican el *principio de superposición*, esto es, que la ecuación de una suma es la suma de las ecuaciones. Este tipo de ecuaciones aparecen frecuentemente en muchas disciplinas. La teoría de las ecuaciones diferenciales lineales es abundante y rica. Se cumple que la solución general de la ecuación homogénea (3) es un espacio vectorial (con dimensión igual al orden de la ecuación), esto es, la combinación lineal de soluciones es también una solución (nótese que el principio de superposición es esencial), y existen combinaciones que pueden generar todas las posibles soluciones.

$$y_{gh}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

De esta forma, se buscará una base de funciones que son solución de la ecuación homogénea. El determinante *wronskiano*

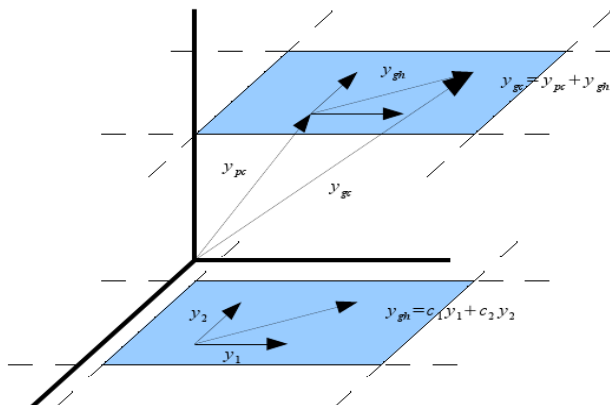
$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es la principal herramienta para comprobar la independencia de un conjunto de soluciones; si es no nulo, las funciones son independientes. Sumar una solución particular cualquiera de la ecuación completa a la solución general de la homogénea proporciona también una solución particular de la ecuación completa,

debido a la condición de linealidad (4). Es más, otro resultado teórico asegura que, conocida la solución general de la ecuación homogénea (3), para encontrar la solución general de la ecuación completa (2) es suficiente añadir cualquier solución particular de esta ecuación completa:

$$y_{gc}(x) = y_{pc}(x) + y_{gh}(x).$$

Utilizando el espacio euclídeo, en la siguiente figura se representan los espacios vectoriales de soluciones (es sólo una representación).



El hecho de que esta solución particular de la ecuación completa pueda ser cualquiera, al igual que la base de funciones de la solución general de la homogénea, hace que dos expresiones ligeramente distintas pueden ser ambas solución general de (2); en el dibujo puede verse que otros vectores distintos pueden generar los mismos espacios. Nótese que mientras el espacio de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial, el de la ecuación completa no lo es (no pasa por el origen, es decir, no contiene a la función nula), es un espacio afín. La teoría mencionada en este párrafo es cierta sólo para ecuaciones lineales, aunque en este documento no serán las únicas de las que se hable. Para la ecuación lineal de orden uno, existe un procedimiento general que permite resolverla, sean sus coeficientes constantes o no; ya para la ecuación lineal de orden dos, no existe tal procedimiento si los coeficientes son no constantes (página 96 de libro *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas*, de George F. Simmons [2ª edición]), aunque para algún caso particular de ecuación pueda existir; sin embargo, cuando los coeficientes son constantes, existe un procedimiento incluso para las ecuaciones de orden  $n$ . En otros casos, por ejemplo los correspondientes a ecuaciones no lineales, que son mayoría en el índice, habremos de conformarnos con calcular alguna solución de la ecuación homogénea o particular.



## 3. Resolución de ecuaciones: de la ecuación a la función

### 3.1. Ecuaciones de orden 1

#### 3.1.1. De grado 1 en $y'$

##### Introducción

Con respecto a la notación, dado que por definición  $y' = \frac{dy}{dx}$ , los términos  $dx$  y  $dy$  se pueden tratar como los números o variables al operar con ellos, separándolos de la fracción; por tanto, una misma ecuación se puede escribir de distintas formas:

$$y' + f(x, y) \cdot y = g(x, y) \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = h(x, y) \leftrightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Nota 1: La notación  $f'$  siempre denota una derivada respecto a la variable independiente, sea ésta la que sea. Por ejemplo, a veces se tendrá  $p'$  para representar  $dp/dy$ . Un caso será en ecuaciones donde no aparece la  $x$ , porque se harán cambios en que se supone que la variable independiente es  $y$  y la dependiente es  $p = p(y)$ , para calcular  $p$  y luego deshacer el cambio de variable. En el apéndice A.3. se ha incluido un enlace a un documento sobre las distintas notaciones utilizadas en Cálculo Diferencial.

### 3.1.1.1. Método para resolver ecuaciones lineales

Es sin duda uno de los tipos de ecuaciones más importante. Para resolver  $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ , vamos a buscar primero la solución general de su ecuación homogénea asociada,  $u(x)$ , y después vamos a utilizar (hay varios disponibles) el *método de variación de las constantes*, que se verá con más detalle en la sección 3.2.1.3.1. (con más de una constante), para calcular una solución particular de la ecuación completa.

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Esta ecuación es de variables separadas (quien no haya visto nunca ecuaciones diferenciales puede consultar el siguiente subapartado 3.1.1.2.), es decir, se puede resolver haciendo

$$\frac{1}{y} dy = -f(x) dx \rightarrow \log(y) = -\int f(x) dx + c \rightarrow y = e^{-\int f(x) dx + c} = c_1 e^{-\int f(x) dx} = c_1 y_1(x) = y_{gh}(x)$$

El método de variación de las constantes (se volverá a él en 3.2.1.3.1.) consiste, para ecuaciones de orden uno, en:

- 1) Convertir la constante  $c_1$  en una función de  $x$ , esto es,  $c_1(x)$ :  $y(x) = c_1(x) y_1(x)$
- 2) Calcular  $y'$  e igualar el sumando donde aparece  $c_1'$  a  $g(x)$ :

$$\begin{cases} y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' \\ c_1' y_1 = g(x) \end{cases}$$

- 3) Despejar e integrar  $c_1'(x)$  para, integrando, calcular  $c_1(x)$

$$c_1' = \frac{g(x)}{y_1(x)} \rightarrow dc_1 = \frac{g(x)}{y_1(x)} dx \rightarrow c_1(x) = \int \frac{g(x)}{y_1(x)} dx + c$$

Finalmente, tomando  $c = 0$  en esta última expresión (se puede, porque estamos buscando una solución particular cualquiera),

$$y_{pc}(x) = c_1(x) y_1(x) = \left( \int \frac{g(x)}{c} e^{\int f(x) dx} dx \right) e^{-\int f(x) dx}$$

y, para obtener la solución general de la ecuación completa,

$$y(x) = y_{pc}(x) + y_{gh}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_1 y_1(x) = y_1(x) [c_1(x) + c_1] = e^{-\int f(x) dx} \left( \int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + c_1 \right)$$

Para obtener una solución particular de la completa, se asigna un valor a  $c_1$ : si hay una condición inicial de la ecuación, utilizándola, y si no lo más cómodo es darle el valor  $c_1 = 0$  (así se hará en las secciones 3.2.1.3.3. y 3.2.1.4.3.).

Nota 2: El método para resolver estas ecuaciones se presenta en algunos textos como el cambio de variable  $y(x) = u(x)v(x)$ , donde, después de sustituir  $y' = u'v + uv'$  en la ecuación, se impone que  $u' + f(x)u = 0$  para calcular  $u(x)$  y se vuelve a la ecuación, que ahora es  $uv' = g(x)$  para calcular  $v(x)$ . Como se recomienda en otros textos, es también posible memorizar la fórmula que se ha obtenido para la solución, en vez del cambio  $y = uv$  y cómo aplicarlo, cosa que se suele hacer cuando hay que resolver  $n$  ecuaciones lineales consecutivas (para resolver una de

orden  $n$ , como se verá, por ejemplo, en el método operacional de las secciones 3.2.1.3.3. y 3.2.1.4.3.). Sin embargo, ahora parece más natural y útil seguir el camino de resolver la homogénea y luego aplicar el método de variación de las constantes de la sección 3.2.1.3.1.

Nota 3: Como sucede con otros métodos, el resultado es que al final se resuelve una ecuación mediante la resolución de un número mayor de ecuaciones, pero más sencillas de resolver: aquí se resuelven dos ecuaciones del tipo 3.1.1.2.



### 3.1.1.2. Método para resolver ecuaciones de variables separadas

Éste es el primer método que se debe probar al buscar la solución de una ecuación diferencial. Consiste en intentar separar todo lo relacionado con la variable  $x$  en un lado de la ecuación y todo lo relacionado con la variable  $y$  en el otro (los términos  $dx$  y  $dy$  se tratan como los números o variables al operar con ellos; para después integrar deben quedar ambos en el numerador de sus respectivos lados de la ecuación); finalmente, y si ha sido posible la separación, se toman integrales a ambos lados y se resuelven las integrales; al resolver cada integral indefinida habría que añadir una constante, pero basta con añadir una  $c$  al resolver las dos integrales simultáneamente.

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \rightarrow g(y)dy = f(x)dx \rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$G(y) + c_2 = F(x) + c_1 \rightarrow y = G^{-1}(F(x) + c)$$



### 3.1.1.3. Método para resolver ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial es *homogénea* si se cumple que:

- a) Escrita como  $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ , se verifica que  $h(tx, ty) = h(x, y)$
- b) Escrita como  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , se cumple a la vez que  $M(tx, ty) = t^m M(x, y)$  y  $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$  con  $m = n$

Para resolver estas ecuaciones, se aplica el cambio de variable  $y(x) = x \cdot v(x)$  para que se convierta en una ecuación de variables separadas:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = h(x, y) \\ y' = v + x \cdot v' \end{cases} \rightarrow v' \cdot x + v = h(x, vx) = h(1, v) \rightarrow \frac{1}{h(1, v) - v} dv = \frac{1}{x} dx$$

Después de obtener  $v(x)$  se sustituye en  $y(x) = x \cdot v(x)$ .

Nota 4: Algunas veces se utiliza el cambio  $y(x) = x/u(x)$ , que corresponde a  $v(x) = 1/u(x)$  y lleva la misma ecuación de variables separadas pero con la sustitución anterior.

Nota 5: Una función homogénea de grado  $m$  verifica que  $h(-x, -y) = (-1)^m h(x, y)$ , lo que se podría utilizar para buscar soluciones en un cuadrante a partir de las obtenidas para su opuesto (en el que tanto la  $x$  como la  $y$  tienen signo opuesto).



### 3.1.1.4. Método para resolver ecuaciones reducibles a homogéneas

Una ecuación diferencial se puede convertir en una ecuación homogénea si se puede escribir como:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right)$$

Entonces, para resolverla se distinguen dos casos:

a) Si  $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$ , se calcula el punto donde se cortan las curvas  $(\alpha, \beta)$  y se aplica el cambio de variable  $\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$ ; se resuelve la ecuación en función de las variables  $u$  y  $v$ , y finalmente se obtienen  $x$  e  $y$ .

b) Si  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \lambda$ , se tiene que  $y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{\lambda a_1x + \lambda a_2y + b_3}\right)$ , y, por tanto, haciendo el cambio de variable  $z = a_1x + a_2y$  se convierte en una ecuación de variables separadas (3.1.1.2.):

$$\begin{cases} y' = f\left(\frac{z + a_3}{\lambda z + b_3}\right) \\ z' = a_1 + a_2 y' \end{cases} \rightarrow z' = a_1 + a_2 f\left(\frac{z + a_3}{\lambda z + b_3}\right) \rightarrow \frac{1}{a_1 + a_2 f\left(\frac{z + a_3}{\lambda z + b_3}\right)} dz = dx$$



### 3.1.1.5. Método para resolver ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial se llama *exacta* si escrita como  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  se verifica que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La idea detrás de estas ecuaciones es que existe una  $F(x, y) = c = \text{const}$  tal que  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ ,

y como las funciones diferenciables de dos variables cumplen que  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ , por lo que es posible utilizar esto para encontrar  $F(x, y)$ .

1) Como  $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ , entonces  $F(x, y) = \int M(x, y) dx + k(y)$

2) Ahora, para calcular  $k(y)$  y por tanto  $F(x, y)$ , se utiliza la otra condición  $N = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y) dx \right) + \frac{\partial k}{\partial y}$ , lo que da lugar a una ecuación diferencial que permite calcular  $k(y)$  y, finalmente,  $F(x, y)$

La solución final suele darse en forma implícita o, si es posible, en forma explícita:

$$F(x, y) = c = \text{const} \quad \text{o} \quad y = f(x)$$

Nota 6: También podrían hacerse los pasos en el orden inverso, es decir, utilizar primero la condición sobre la  $N$  y después la de la  $M$  para calcular una  $k(x)$  y, finalmente,  $F(x, y)$ .



### 3.1.1.6. Método para resolver ecuaciones de factor integrante

Una ecuación diferencial se dice que es *de factor integrante* si existe una función  $\mu(x, y)$ , que es el *factor integrante*, si después de multiplicarla por ese factor se convierte en ecuación exacta. Es decir, ahora se tiene que verificar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \\ M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= 0\end{aligned}$$

Para facilitar la búsqueda de un factor integrante válido, el cual debe verificar la última condición, suelen probarse casos más sencillos que la simplifican. Cuando el factor integrante depende de  $x$  e  $y$  a través de una nueva variable  $z(x, y)$ , la regla de la cadena implica que:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial y}$$

Al introducir estas expresiones en la condición que debe cumplir el factor integrante, se obtiene una ecuación integral para  $\mu(z)$ . Cuando sabemos resolver esta ecuación, se obtiene un factor integrante válido  $\mu(x, y) = \mu(z(x, y))$ .

- 1) Probamos  $\mu(x, y) = \mu(x)$ , es decir  $z(x, y) = x$ , entonces  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ , y, por tanto la condición del factor integrante queda  $\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ . Ahora, como el miembro de la izquierda de la igualdad sólo depende de la variable  $x$ , lo mismo debería suceder con el de la derecha, y la ecuación sería de variables separadas.

$$\frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx$$

Si el término de la derecha no depende sólo de  $x$ , concluimos que fallaba la hipótesis  $\mu(x, y) = \mu(x)$ . Pasaríamos a probar el siguiente caso.

- 2) Probamos  $\mu(x, y) = \mu(y)$ , es decir  $z(x, y) = y$ , entonces  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ , y, por tanto la condición del factor integrante queda  $\frac{d\mu}{dy} = -\frac{\mu}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ . Ahora, como el miembro de la izquierda de la igualdad sólo depende de la variable  $y$ , lo mismo debería suceder con el de la derecha, y la ecuación sería de variables separadas.

$$\frac{1}{\mu} d\mu = -\frac{1}{M} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy$$

Si el término de la derecha no depende sólo de  $y$ , concluimos que fallaba la hipótesis  $\mu(x, y) = \mu(y)$ . Pasaríamos a buscar un factor integrante de otra forma.

- 3) Una forma simple de que el factor dependa a la vez de  $x$  y de  $y$  es que lo haga a través de su suma  $x+y$ . Entonces se supone que  $\mu(x, y) = \mu(x+y)$ , es decir  $z(x, y) = x+y$ . Como  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z}$ , la

condición queda como  $\frac{d\mu}{dz} = -\frac{\mu}{M-N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ . Ahora, como el miembro de la izquierda de la igualdad sólo depende de la variable  $z$ , lo mismo debería suceder con el de la derecha, y la ecuación sería de variables separadas.

$$\frac{1}{\mu} d\mu = -\frac{1}{M-N} \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dz$$

Si el término de la derecha no depende sólo de  $z$ , concluimos que fallaba la hipótesis  $\mu(x, y) = \mu(x+y)$ . No vamos a probar más simplificaciones para el factor.

4) También es frecuente suponer que  $\mu(x, y) = \mu(x \cdot y)$ , es decir  $z(x, y) = xy$ . En este caso

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} y \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} x.$$

5) Otro ejemplo es  $\mu(x, y) = \mu(xe^y)$ , es decir  $z(x, y) = xe^y$ . En este caso  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} e^y$  y

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} x e^y.$$

Para el primer caso de entre estas simplificaciones en que se haya llegado a una ecuación resoluble (en la que aparecen  $\mu$ ,  $z$  y la derivada de  $\mu$  con respecto a  $z$ ; si es necesario, con las  $x$  y las  $y$  se han ido haciendo operaciones de completación, sumando y restando, multiplicando y dividiendo, hasta conseguir grupos que se puedan sustituir por  $z$ , o grupos de  $x$  e  $y$  que se cancelen), si ha habido alguno, se calcula el factor integrante resolviendo su ecuación y, después de sustituirlo en  $(\mu M)dx + (\mu N)dy = 0$ , se resuelve esta ecuación exacta (cuidado con la notación, ahora la  $M$  y la  $N$  del método para resolver las exactas se refiere a  $\mu M$  y  $\mu N$  de este tipo de ecuaciones).



### 3.1.1.7. Método para resolver la ecuación de Bernoulli

Son las ecuaciones que tienen la forma  $y' + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^n$ . Como parece que es el factor  $y^n$  el que «molesta», la metodología que conviene recordar consiste en dividir por ese factor (esto se puede hacer cuando  $y$  no es nula. De hecho  $y = 0$  es una solución trivial de la ecuación que no suele tener interés, aunque depende de qué represente la ecuación. Por tanto, al dividir por este factor se puede entender que se están buscando las soluciones no nulas):

$$\frac{y'}{y^n} + f(x) \cdot \frac{y}{y^n} = g(x).$$

Esta ecuación sugiere un cambio de variable que lleve a  $y' y^{-n} = z'$ , lo que lleva

$$z = \int z' = \int y' y^{-n} = \frac{1}{1-n} y^{1-n} + c_1 = \frac{1}{1-n} y^{1-n}$$

Nota 7: En primer lugar, aunque se puede arrastrar la constante  $c_1$ , también se puede tomar igual a 0, lo que lleva a soluciones equivalentes con menos complicaciones (léase el apéndice A.1. sobre estas constantes para las ecuaciones lineales).

Nota 8: En algunos textos se recomiendan el cambio  $z = y^{1-n}$ , que es esencialmente el mismo. Por otro lado, esta ecuación también se puede resolver como se hizo en 3.1.1.1. o mediante el cambio  $y = uv$ .

Con este cambio, la ecuación se escribe como

$$z' + (1-n) f(x) \cdot z = g(x)$$

que es una ecuación lineal para  $z(x)$ . Una vez resuelta y calculada  $z(x)$ , se deshace el cambio de variable:

$$y^{1-n}(x) = (1-n)z(x) \rightarrow y(x) = [(1-n)z(x)]^{\frac{1}{1-n}}$$



### 3.1.1.8. Método para resolver la ecuación de Ricatti, cuando se conoce alguna solución

Son las ecuaciones que tienen la forma  $y' + f(x) \cdot y^2 + g(x) \cdot y = h(x)$ . Se resuelven fácilmente cuando ya se conoce alguna solución. Para encontrarla, puede hacerse una búsqueda rápida «a ojo» o bien utilizar algún método.

- (a) Si se conoce una solución  $\varphi(x)$ , se aplica el cambio de variable  $y = \varphi(x) + v(x)$ . Como  $y' = \varphi' + v'$ , se sustituye en la ecuación:

$$\begin{aligned} \varphi' + v' + f(x) \cdot (\varphi + v)^2 + g(x) \cdot (\varphi + v) &= h(x) \\ [\varphi' + f(x) \cdot \varphi^2 + g(x) \cdot \varphi] + [v' + f(x) \cdot v^2 + 2f(x)\varphi v + g(x) \cdot v] &= h(x) \end{aligned}$$

Por ser  $\varphi(x)$  solución de la ecuación completa, el primer corchete vale  $h(x)$ , que se anula con el mismo valor del otro miembro de la igualdad, y así:

$$v' + f(x) \cdot v^2 + [2f(x)\varphi + g(x)]v = 0$$

Esta ecuación es de tipo Bernouilli, por lo que resolviéndola como se ha indicado, se calcula  $v(x)$  y, finalmente,  $y(x)$ .

- (b) En el caso en que se conozcan dos soluciones,  $\varphi_1(x)$  y  $\varphi_2(x)$ , aunque se podría hacer lo mismo que en el apartado anterior usando cualquiera de ellas, el cambio  $v(x) = \frac{y - \varphi_1(x)}{y - \varphi_2(x)}$  lleva directamente a una ecuación de variables separadas (3.1.1.2.) para  $v(x)$ :

$$\frac{v'}{v} = f(x)[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]$$

Una vez calculada  $v(x)$ , se vuelve al cambio de variable y se despeja  $y(x)$ .



## 3.1.2. De grado $m$ en $y'$

### 3.1.2.1. Método para resolver ecuaciones polinomiales

Son las ecuaciones que tienen la forma

$$(y')^m + f_1(x, y) \cdot (y')^{m-1} + f_2(x, y) \cdot (y')^{m-2} + \dots + f_{m-1}(x, y) \cdot y' + f_m(x, y) = 0$$

Considerando a  $y'$  como variable algebraica, si puede escribirse

$$[y' - g_1(x, y)]^{m_1} \dots [y' - g_k(x, y)]^{m_k} = 0,$$

con  $m_1 + \dots + m_k = m$ , como un producto es nulo sólo, y sólo si, alguno de los factores lo es, la solución

vendrá dada por la unión de las soluciones de las ecuaciones de grado uno

$$y' = g_h(x, y).$$



### 3.1.2.2. Método para resolver ecuaciones de la forma $F(y, y') = 0$

En estas ecuaciones no aparece la  $x$  explícitamente. Se distinguen dos casos:

3.1.2.2.1. Si es posible despejar hasta obtener la ecuación de la forma  $y = g(y')$ , se aplica el cambio de variable  $y' = p$ . Este cambio implica que

$$\begin{cases} y = g(p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dy = g'(p) dp \\ dy = p dx \end{cases} \rightarrow dx = \frac{g'(p)}{p} dp$$

Entonces, la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = \int \frac{g'(p)}{p} dp + c \\ y = g(p) \end{cases}$$

A partir de esta solución es posible obtener la solución en la forma implícita  $f(x, y) = 0$ , despejando de ambas ecuaciones  $p$  o una parte común que involucre a  $p$  en ambas ecuaciones.

3.1.2.2.2. Si es posible despejar hasta obtener  $y = \alpha(t)$  y  $p = \beta(t)$  de forma que se cumpla  $y' = p$ , se tiene que

$$\begin{cases} dy = \alpha'(t) dt \\ dy = \beta(t) dx \end{cases} \rightarrow dx = \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)} dt$$

Entonces, la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x = \int \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)} dt + c \\ y = \alpha(t) \end{cases}$$

A partir de esta solución es posible obtener la solución en la forma implícita  $f(x, y) = 0$ , despejando de ambas ecuaciones  $t$  o una parte común que involucre a  $t$  en ambas ecuaciones.



### 3.1.2.3. Método para resolver ecuaciones de la forma $F(x, y') = 0$

En estas ecuaciones no aparece la  $y$  explícitamente. Se distinguen dos casos:

3.1.2.3.1. Si es posible despejar hasta obtener la ecuación de la forma  $x = g(y')$ , se aplica el cambio de variable  $y' = p$ . Este cambio implica que

$$\begin{cases} x = g(p) \\ \frac{dy}{dx} = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = g'(p) dp \\ dx = \frac{dy}{p} \end{cases} \rightarrow g'(p) dp = \frac{dy}{p}$$

Entonces, la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x=g(p) \\ y=\int p g'(p) dp+c \end{cases}$$

A partir de esta solución es posible obtener la solución en la forma implícita  $f(x,y)=0$ , despejando de ambas ecuaciones  $p$  o una parte común que involucre a  $p$  en ambas ecuaciones.

3.1.2.3.2. Si es posible despejar hasta obtener  $x=\alpha(t)$  y  $p=\beta(t)$ , se aplica el cambio  $y'=p$ ,

$$\begin{cases} dx=\alpha'(t) dt \\ dy=\beta(t) dx \end{cases} \rightarrow dy=\beta(t)\alpha'(t) dt$$

Entonces, la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x=\alpha(t) \\ y=\int \beta(t)\alpha'(t) dt+c \end{cases}$$

A partir de esta solución es posible obtener la solución en la forma implícita  $f(x,y)=0$ , despejando de ambas ecuaciones  $t$  o una parte común que involucre a  $t$  en ambas ecuaciones.



### 3.1.2.4. Método para resolver la ecuación de Lagrange (y la de Clairaut)

Es una ecuación de la forma  $y=xf(y')+g(y')$ . Se va a aplicar el cambio  $y'=p$ , pero antes se deriva en la ecuación para que no aparezca  $y$ .

$$y'=f(y')+xf'(y')(y')'+g'(y')(y')' \rightarrow p=f(p)+xf'(p)p'+g'(p)p' \rightarrow p-f(p)=[xf'(p)+g'(p)]\frac{dp}{dx} \quad (*)$$

(1) Ahora, si  $p-f(p)$  no es nulo, en (\*) se puede hacer

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x - \frac{g'(p)}{p-f(p)}=0$$

con lo que esta ecuación es lineal para  $x(p)$ , y puede ser resuelta, de manera que

$$\begin{cases} x=h(p) \\ y=h(p)f(p)+g(p) \end{cases}$$

A partir de esta solución, en forma paramétrica, es posible obtener la solución en la forma implícita  $F(x,y)=0$ , despejando de ambas ecuaciones  $p$  o una parte común que involucre a  $p$  en ambas ecuaciones.

(2) En el caso en que  $p-f(p)$  es nulo (lo que sucede cuando  $f(x)=x$ , y, por tanto,  $f'(x)=1$ ), se tiene que (\*) toma la forma

$$0=[x+g'(p)]\frac{dp}{dx} \rightarrow \frac{dp}{dx}=0 \quad \text{ó} \quad x+g'(p)=0$$

(2.1) El primer subcaso se resuelve como

$$\frac{dp}{dx}=0 \rightarrow y''(x)=0 \rightarrow y(x)=c_1x+c_2$$

lo que ha llevado a una solución ya en forma implícita para  $y(x)$ .

(2.2) Mientras, para el segundo subcaso, cuando  $g'(x)$  es invertible,

$$x + g'(p) = 0 \rightarrow y'(x) = (g')^{-1}(-x) \rightarrow y(x) = \int (g')^{-1}(-x) dx$$

se puede obtener directamente  $y(x)$  en forma explícita, mientras que si  $g'(x)$  no es invertible, se puede hacer

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = -g'(p)f(p) + g(p) \end{cases}$$

y se obtiene una solución en forma paramétrica, de la que podría pasarse a la forma implícita o explícita. En cualquier caso, para el caso (2) habría que considerar la unión de las dos soluciones de estos dos subcasos (nótese que la ecuación puede ser no lineal y, por tanto, las dos pueden ser válidas porque el espacio de soluciones no tiene por qué tener una dimensión).

Nota 9: Un caso particular de ecuación de Lagrange, que a veces también se menciona explícitamente por su mayor simplicidad, es la ecuación de Clairaut  $y = x y' + g(y')$ .



## 3.2. Ecuaciones de orden $n$

### 3.2.1. De grado 1 en $y^{(n)}$

#### 3.2.1.1. Método para resolver ecuaciones lineales del tipo $y^{(n)} = f(x)$

Es el tipo más sencillo posible de ecuación lineal de orden  $n$ . Basta integrar  $n$  veces consecutivas:

$$y^{(n)}(x) = f(x) \rightarrow \int y^{(n)}(x) dx = \int f(x) dx \rightarrow y^{(n-1)}(x) = \int f(x) dx + c_1$$

y luego

$$y^{(n-2)}(x) = \int y^{(n-1)}(x) dx = \int \int f(x) dx + c_1 dx$$

repetiendo el proceso hasta obtener

$$y(x) = \int \cdots \int \int f(x) dx dx \cdots dx = g(x) + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$$

Al final del proceso, como se habrá añadido una constante al resolver cada integral indefinida, la solución final será una función más un polinomio de grado  $n-1$  (en total, un número de constantes igual al orden  $n$ ).

Nota 10: El caso  $n = 1$  puede verse también como resoluble por el método de separación de variables, 3.1.1.2., porque  $y' = f(x) \rightarrow dy = f(x) dx$ .



#### 3.2.1.2. Método para resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Son ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

y se resuelven buscando soluciones de la forma  $y = e^{rx}$ . Después de calcular las derivadas,  $y^{(n)} = r^n e^{rx}$ , y sustituir,

$$r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_n e^{rx} = e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n) = 0 \leftrightarrow r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Las raíces del polinomio (llamado *polinomio característico*) corresponden a funciones que verifican la ecuación (llamada *ecuación característica*), es decir, a soluciones. Según sean estas raíces se distinguen distintos casos, que dan lugar a soluciones independientes (no es necesario comprobarlo con el wronskiano). Suponemos que los coeficientes del polinomio son reales, por lo que las raíces complejas que puedan aparecer lo harán por pares conjugados.

- Cada raíz real simple dará lugar a una solución  $y_1 = e^{r_j x}$
- Cada raíz real de multiplicidad  $k_j$  dará lugar al mismo número de soluciones  $y_1 = e^{r_j x}, y_2 = x e^{r_j x}, y_3 = x^2 e^{r_j x}, \dots, y_{k_j} = x^{k_j-1} e^{r_j x}$
- Cada par de raíces complejas simple,  $a \pm bi$ , dará lugar al par de soluciones  $y_1 = \cos(bx) e^{ax}$  y  $y_2 = \sin(bx) e^{ax}$
- Cada par de raíces complejas múltiple,  $a \pm bi$ , de multiplicidad  $k_j$  dará lugar a las series de soluciones  $y_1 = \cos(bx) e^{ax}, y_2 = x \cos(bx) e^{ax}, y_3 = x^2 \cos(bx) e^{ax}, \dots, y_{k_j} = x^{k_j-1} \cos(bx) e^{ax}$  y  $y_1 = \sin(bx) e^{ax}, y_2 = x \sin(bx) e^{ax}, y_3 = x^2 \sin(bx) e^{ax}, \dots, y_{k_j} = x^{k_j-1} \sin(bx) e^{ax}$

Finalmente, la solución general de la ecuación homogénea estará dada por la combinación lineal de todas las soluciones provenientes de los distintos tipos de raíces:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

Nota 11: Los resultados teóricos garantizan que este método de buscar soluciones de la forma  $e^{rx}$  resuelve el caso de coeficientes constantes. Sin embargo, esto no impide que tenga alguna utilidad para el caso de coeficientes no constantes: por ejemplo, al aplicárselo a la ecuación

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

es posible calcular una solución después, y después, con el método que se verá en el apartado 3.2.1.4.4., se puede calcularse la otra necesaria para expresar la completa de esta ecuación lineal homogénea (dos soluciones independientes son base de su espacio vectorial de soluciones).



### 3.2.1.3. Métodos para resolver ecuaciones lineales completas con coeficientes constantes

Estas ecuaciones son de la forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Dado que en 3.2.1.2. ya se ha aprendido a resolver la ecuación homogénea, para encontrar la solución general de la ecuación completa, según lo dicho en la sección 2., basta ahora con obtener cualquier solución particular de esta misma ecuación completa. Los siguientes métodos se presentan aquí para terminar de resolver la ecuación de coeficientes constantes, pero en algunos casos también son aplicables a ecuaciones con coeficientes no constantes: véase la sección 3.2.1.4.3.

**3.2.1.3.1. Método de variación de las constantes.** Este método, a diferencia de otros que se verán después, es aplicable cuando ya se ha calculado la solución general,  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ , de la ecuación homogénea  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ .

La idea de este método es:

- 1) Convertir las constantes en funciones:  $y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$

- 2) Calcular las derivadas consecutivas, imponiendo que la suma de los términos en que aparecen las derivadas de estas nuevas funciones tome el valor 0 en todos los pasos (con esto se consigue que nunca aparezcan derivadas segundas) salvo en el último paso, en que se iguala a  $f(x)$ :

$$\begin{cases} y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2' + \dots + c_n' y_n + c_n y_n' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + \dots + c_n' y_n' + c_n y_n'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n'' \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = c_1' y_1^{(n-1)} + c_1 y_1^{(n)} + c_2' y_2^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} + c_n y_n^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} + \dots + c_n y_n^{(n)} \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

- 3) Resolver el sistema de ecuaciones lineales en que las variables son  $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$  (por cualquier método: sustitución, Cramèr, Gauss, etc.):

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots + c_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1' y_1^{(n)} + c_2' y_2^{(n)} + \dots + c_n' y_n^{(n)} = f(x) \end{cases}$$

Nota 12: En este sistema, el determinante de la matriz de coeficientes coincide con el wronskiano de  $y_1, \dots, y_n$ , el cual, dado que estas funciones son independientes, es distinto de cero. Esto implica que la matriz de coeficientes tiene rango máximo, por lo que el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor y el teorema de Rouché-Frobenius garantiza que el sistema es compatible determinado, es decir, que tiene solución única. Dado que se supone que  $f(x)$  es no nula, porque si no estaríamos ante una ecuación homogénea, no completa, esa solución única no es la trivial; pero aunque  $f(x)$  fuese nula, este método llevaría a la solución trivial para este sistema, es decir, a que todas las derivadas son nulas, las  $c_k$  son constantes y se volvería a la solución general de partida.

- 4) Integrar  $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ , para calcular  $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$

Nota 13: Siempre que se sepan resolver estas integrales, el método de la variación de las constantes proporciona una solución particular de la ecuación completa (a diferencia, por ejemplo, del método de los coeficientes indeterminados, 3.2.1.3.2., que tiene una componente heurística, aunque éste puede ser más rápido y proporcionar una solución particular más fácilmente).

Nota 14: Si estamos aplicando este método para encontrar una solución particular de la ecuación completa, pero dentro de un ejercicio cuyo objetivo es encontrar la solución general de la ecuación completa, no hay que olvidar sumar la solución general de la completa, porque para las ecuaciones lineales

$$y(x) = y_{gh} + y_{pc} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \dots + c_n(x) y_n(x)$$

Nota 15: Así, este método de la variación de las constantes siempre proporciona una solución particular de la ecuación completa (a diferencia, por ejemplo, del método de los coeficientes indeterminados, 3.2.1.3.2., que tiene una componente heurística), siempre que se sepan resolver las integrales del siguiente punto. Este método, para el caso de orden uno ( $n = 1$ ), se utilizó en 3.1.1.1.

**3.2.1.3.2. Método de los coeficientes indeterminados.** La idea que subyace a este método es parecida a la de 3.2.1.2. en el sentido de que consiste en buscar soluciones de determinada forma, en los que el valor de sus parámetros se calculan a posteriori. Sin embargo, en aquel método, por tratarse de una ecuación homogénea, se elegía la función exponencial, que nunca se anula, mientras que ahora se van a utilizar modelos más generales que la función exponencial. Estos modelos se elegirán en función de cómo sea  $f(x)$ : si es una exponencial, se utilizará una exponencial (con el mismo exponente); si es una función trigonométrica, conviene probar con una función trigonométrica; si es un polinomio, conviene un polinomio; si es una combinación de los anteriores tipos de funciones, conviene una combinación; etcétera. Después de sustituir en la ecuación, con frecuencia hay que identificar coeficientes (sobre este método, ver la nota 21 de 3.2.1.4.1.) para establecer un sistema que permita calcular los coeficientes indeterminados. Por este motivo, el modelo puede tener tantos coeficientes indeterminados como orden tenga la ecuación, aunque a veces el valor de alguno es «evidente» y se puede probar un valor concreto. Por ejemplo ( $f_k$  son coeficientes conocidos):

- Si  $f(x) = f_0$ , se puede probar  $y = c_0$
- Si  $f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_k x^k$ , se puede probar  $y(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$
- Si  $f(x) = f_0 \text{sen}(f_1 x)$ , se pueden probar  $y(x) = c_0 \text{sen}(f_1 x)$ ,  $y(x) = c_0 \text{sen}(c_1 x)$  ó  $y(x) = c_0 \text{sen}(f_1 x) + c_1 \text{sen}(f_1 x)$
- Si  $f(x) = f_0 \cos(f_1 x)$ , se pueden probar  $y(x) = c_0 \cos(f_1 x)$ ,  $y(x) = c_0 \cos(c_1 x)$  ó  $y(x) = c_0 \text{sen}(f_1 x) + c_1 \text{sen}(f_1 x)$
- Si  $f(x) = f_0 e^{f_1 x}$ , se pueden probar  $f(x) = c_0 e^{f_1 x}$  ó  $f(x) = c_0 e^{c_1 x}$

3.2.1.3.3. Método **operacional**. Este método se debe a Oliver Heaviside, y sus métodos les parecieron tan extraños a los científicos de la época que fue considerado como un excéntrico. La idea de este método consiste en resolver una ecuación de orden  $n$  resolviendo varias de órdenes uno o dos (en general  $n$  de orden uno). Para ello:

1) Se define el operador  $\frac{d^n}{dx^n} = D^n$ , por lo que las derivadas se convierten en potencias del operador:  $y^{(n)} = D^n y$

2) Se aplica esta notación para definir un «operador diferencial polinomial»  $p(D)$ :

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = p(D) y = f(x)$$

3) Si se puede definir cómo actúa el operador inverso de  $p(D)$ , se podrá despejar  $y$  haciendo

$$\frac{1}{p(D)} p(D) y = \frac{1}{p(D)} f(x) \rightarrow y = \frac{1}{p(D)} f(x)$$

4) Este operador inverso se calcula más fácilmente si se descompone el polinomio  $p(D)$ , porque hay un resultado teórico que garantiza que tal descomposición del polinomio característico se corresponde con la acción de los operadores de los miembros de la descomposición (ver el teorema 6.6 de la sección 6.7 del volumen 2 del libro *Cálculus*, de Tom M. Apostol). Vamos a suponer que en la ecuación diferencial los coeficientes son constantes y números reales; en este caso, las raíces serán reales o, en el caso de las complejas, vendrán dadas por pares (en polinomios reales de grado dos)

$$P(D) = (D - r_1)(D - r_2) \dots (D - r_{n_1})(D^2 + b_1 D + c_1)(D^2 + b_2 D + c_2) \dots (D^2 + b_{n_2} D + c_{n_2})$$

donde se han colocado primero las raíces reales y en segundo lugar los pares de raíces complejas (se ha de cumplir que  $n_1 + 2n_2 = n$ ). Todas estas raíces pueden ser simples o múltiples, da igual en este método. Con esta descomposición, el operador inverso se puede interpretar de distintas formas

$$4.1) \frac{1}{P(D)} = \frac{1}{D - r_1} \dots \frac{1}{D - r_{n_1}} \frac{1}{D^2 + b_1 D + c_1} \dots \frac{1}{D^2 + b_{n_2} D + c_{n_2}},$$

lo que llevaría a aplicar uno tras otro («en serie») un operador inverso a la función resultante de aplicar el operador anterior. Nótese que da igual el orden y que, por otro lado, algunos de estos operadores pueden estar repetidos (para las raíces múltiples)

$$4.2) \frac{1}{P(D)} = \frac{A_1}{D - r_1} + \dots + \frac{A_{n_1}}{D - r_{n_1}} + \frac{B_1 + C_1 D}{D^2 + b_1 D + c_1} + \dots + \frac{B_{n_2} + C_{n_2} D}{D^2 + b_{n_2} D + c_{n_2}},$$

donde las constantes del numerador se calculan haciendo lo que se conoce como *descomposición en fracciones simples* (esta «herramienta matemática» se utiliza también en otros cálculos, por ejemplo en las integrales racionales); esto llevaría a aplicar («en paralelo») un operador inverso a  $f(x)$

4.3)  $\frac{1}{P(D)} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \dots$ , donde los coeficientes se calculan utilizando la *división inversa de polinomios*. La serie es, en general, infinita; sin embargo, dado que los polinomios tienen un número finito de derivadas no nulas, esta descomposición es aplicable cuando  $f(x)$  es un polinomio, porque sólo será necesario tener en cuenta los primeros monomios de la serie

5) Para las descomposiciones 4.1 y 4.2 anteriores, es necesario definir cómo actúan los operadores  $\frac{1}{D-r}$  y  $\frac{1}{D^2+bD+c}$ , para  $b^2 - 4c < 0$ , sobre una función cualquiera  $g(x)$ .

**Grado 1.** Para el primer caso, y según lo dicho en 3.1.1.1. (dando el valor nulo a las constantes de la solución general obtenida allí, porque ahora estamos interesados en cualquier solución particular),

$$(D-r)y = g(x) \leftrightarrow y' - ry = g(x) \leftrightarrow y = e^{rx} \int e^{-rx} g(x) dx$$

por lo que se define

$$\frac{1}{D-r} g(x) = e^{rx} \int e^{-rx} g(x) dx$$

**Grado 2.** Según lo dicho en 3.2.1.2. y 3.2.1.3.1.,

$$(D^2 + bD + c)y = g(x) \leftrightarrow y'' + by' + cy = g(x) \leftrightarrow y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

por lo que se define (para  $b^2 - 4c < 0$ , porque las raíces son complejas conjugadas)

$$\frac{1}{D^2 + bD + c} g(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

donde, según 3.2.1.2.,

$$y_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)e^{-\frac{b}{2}x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = \text{sen}\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x\right)e^{-\frac{b}{2}x}$$

y, según 3.2.1.3.1.,

$$c_1(x) = \int \frac{-g(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx \quad \text{y} \quad c_2(x) = \int \frac{g(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx$$

Nota 16: Por los motivos explicados en el apéndice A.1, al resolver las integrales que se han dejado indicadas en las definiciones dadas para los grados uno y dos, no es necesario añadir ninguna constante (o, lo que es lo mismo, se puede pensar que se añade y después se le da el valor particular 0).

Nota 17: El caso de raíces complejas, aunque resoluble analíticamente, es complicado, por lo que no suele incluirse en los textos. Yo no lo he visto en los que he manejado (cinco o seis), y los cálculos que aparece aquí para los pares de raíces complejas son míos. La principal utilidad del método consiste en poder aplicar mecánicamente la fórmula de grado uno, porque resolver las integrales anteriores puede no ser fácil. A cambio, en algunos textos se incluyen algunas propiedades que permiten hacer los cálculos para ciertos tipos de funciones frecuentes (nótese que  $H$  puede tener grado dos o mayor):

- Para las funciones exponenciales

$$D^q(e^{ax}) = a^q \cdot e^{ax} \rightarrow H(D)(e^{ax}) = H(a) \cdot e^{ax} \rightarrow \frac{1}{H(D)}(e^{ax}) = \frac{1}{H(a)}(e^{ax})$$

- Para las funciones trigonométricas, se puede ver que

$$H(D^2)\text{sen}(ax+b) = H(-a^2)\text{sen}(ax+b) \rightarrow \frac{1}{H(D^2)}\text{sen}(ax+b) = \frac{1}{H(-a^2)}\text{sen}(ax+b)$$

y, de la misma forma,

$$\frac{1}{H(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{1}{H(-a^2)}\cos(ax+b)$$

- Para funciones multiplicadas por una exponencial, se cumple que

$$\frac{1}{H(D)} e^{ax} f(x) = e^{ax} \frac{1}{H(D+a)} f(x)$$

- Para funciones multiplicadas por  $x$ , se cumple que

$$\frac{1}{H(D)} x f(x) = x \frac{1}{H(D)} f(x) - x \frac{H'(D)}{H(D)^2} f(x)$$

Nota 18: Si estuviésemos trabajando con funciones holomorfas (funciones complejas de variable compleja que son derivables) y sus ecuaciones diferenciales, se podrían considerar coeficientes complejos, y en este caso sería necesario definir sólo el operador inverso de  $D-r$  con  $r$  complejo (definición que debería extender a la dada aquí, dado que los números reales están dentro de los complejos), porque el *teorema fundamental del álgebra* asegura que existen  $n$  raíces complejas (alguna puede ser múltiple).

Nota 19: Nótese que, por ejemplo,  $\frac{1}{D-r}$  y, más generalmente,  $\frac{1}{p(D)}$  representan un operador inverso, no uno sobre un polinomio; podría haberse utilizado la notación  $(D-r)^{-1}$  ó  $p(D)^{-1}$ .

Nota 20: En algunos casos en los que la ecuación lineal inicial tiene coeficientes no constantes, también puede aplicarse el método operacional: véase 3.2.1.4.3.

3.2.1.3.4. Los métodos presentados en las secciones 3.2.1.4.1. y 3.2.1.4.2. para ecuaciones coeficientes no constantes, **método de representación en series de potencias** y **método de la transformada de Laplace**, son también aplicables al caso de coeficientes constantes.



### 3.2.1.4. Métodos para resolver ecuaciones lineales completas con coeficientes no constantes

Son ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

Los métodos que se presentan a continuación pueden ser utilizados tanto para intentar resolver la ecuación homogénea correspondiente como para calcular una solución particular de la completa.

3.2.1.4.1. Veamos el **método de representación en serie de potencias**. Como hemos dicho en la introducción, vamos a buscar soluciones en puntos ordinarios  $x_0$ , en cuyo entorno cualquier función «con buen comportamiento» se puede representar por una serie infinita. En este método se sustituye una serie genérica en la ecuación y se deducen los coeficientes (infinitos, por eso se busca una ley de recurrencia) que definen la serie que es solución de la ecuación. En último término, y si es posible, se identifica la función elemental que representa esta serie infinita.

1) Si  $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots$ , entonces

$$y^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k (x-x_0)^{k-1} = b_1 + b_2(x-x_0) + \dots, \quad y^{(2)} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k (x-x_0)^{k-2} = b_2 + \dots, \\ y^{(3)} = \dots$$

2) Por otra parte, escribiendo también las funciones  $a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$  en serie de funciones (alrededor de  $x_0$ ), cuyos coeficientes son conocidos, sustituyendo en la ecuación e identificando coeficientes (ver la nota de debajo), se pueden ir expresando los coeficientes de la serie/solución buscada en función de los primeros (éstos son tantos como el orden de la ecuación y, como pueden tomar cualquier valor, determinan la familia  $n$ -dimensional de funciones que constituyen la solución general). El radio de convergencia de esta serie es la distancia de  $x_0$  al punto singular de la ecuación más cercano a él. En este proceso de identificar coeficientes, para facilitar el trabajo de

encontrar el patrón general que los relaciona, es conveniente dejar explícitos los productos de números que puedan aparecer, sin hacer productos ni simplificaciones.

Nota 21: Sobre el método de identificación de coeficientes (igualar lo que multiplica a uno y otro lado a cada potencia de  $x$ ), y para que nos resulte más fácil recordarlo o aplicarlo a situaciones más generales, diremos que se basa en el hecho de que las funciones  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  forman una base de un espacio vectorial (dimensión infinita) de funciones (en un entorno de  $x_0$ ), por lo que sólo pueden generar el 0 si se las multiplica por 0 a todas, esto es:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (x-x_0)^l \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - c_k) (x-x_0)^k = 0 \leftrightarrow b_k = c_k \quad \forall k$$

Esta misma idea es aplicable con otros conjuntos de funciones independientes: exponenciales, trigonométricas, etcétera.

Nota 22: En los libros, este método se presenta frecuentemente para  $x_0 = 0$ , lo que simplifica un poco la notación.

Nota 23: Como se ha dicho, una vez obtenida la serie que es solución de la ecuación, si es posible conviene identificar si representa o no alguna función elemental conocida. Conviene, por tanto, tener en mente las series de Taylor de las funciones más conocidas:  $\text{sen}(x)$ ,  $\text{cos}(x)$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ , etcétera; esto permite además identificar composiciones basadas en ellas, como  $\text{sen}(x^2)$ ,  $\text{cos}(x^3)$ ,  $e^{2x}$ ,  $\log(1+x^2)$ , etcétera. Por otro lado, cuando la ecuación diferencial es tal que la solución no se puede encontrar o representar por alguno de los métodos anteriores, este método de representación es especialmente útil (y más para buscar soluciones aproximadas con ordenadores).

Nota 24: Para buscar soluciones en puntos singulares regulares, suele utilizarse el método de Frobenius, similar al anterior, que se puede encontrar en muchos libros de ecuaciones diferenciales.

3.2.1.4.2. El **método de la transformada de Laplace** consiste en convertir, utilizando las propiedades de esta transformada, el problema diferencial original en otro problema diferencial más sencillo (o incluso algebraico, para ecuaciones de orden uno) dentro de un nuevo espacio de funciones; de la nueva ecuación diferencial se obtiene la transformada  $L[y]$ , para finalmente aplicar la transformada inversa y obtener la solución de la ecuación original  $y = L^{-1}L[y]$ . Para hacer todo esto es necesario:

- 1) Definir la transformada de Laplace. Es un operador que actúa sobre una función (de variable independiente  $x$ ) y da lugar a otra función (de variable independiente  $s$ ). Esto mismo hacen la derivación o la integración, por ejemplo, que son también operadores funcionales (aunque en estos casos, como no hay problemas de confusión con la notación, se mantiene la misma variable independiente  $x$  en ambos espacios de funciones). Obviamente, será aplicable donde tenga sentido definirla, que es (consultar algún texto) para una función cualquier  $f(x)$  continua a trozos y de orden exponencial para  $c$  (básicamente, que  $f(x)$  no crece más deprisa que  $e^{cx}$ ), en la región  $x \geq 0$ , se define para  $s > c$ :

$$L[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s)$$

- 2) Deducir algunas de sus propiedades:

a) Sobre una derivada:  $L[f^{(1)}(x)] = sL[f(x)] - f(0)$  y entonces, para derivadas de cualquier orden,  $L[f^{(n)}(x)] = sL[f^{(n-1)}(x)] - f^{(n-1)}(0) = \dots$

b) Sobre una integral:  $L[\int_a^x f(t) dt] = \frac{L[f(x)]}{s} - \frac{1}{s} \int_0^a f(t) dt$

c) Linealidad:  $L[af(x) + bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)]$

d) Convolución:  $L[f(x)*g(x)] = L[f(x)] \cdot L[g(x)]$

e) Límite:  $\lim_{s \rightarrow \infty} L[f(x)] = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

Nota 25: Vemos que la transformada de Laplace convierte derivadas e integrales de orden uno en productos y divisiones por la nueva variable independiente.

Nota 26: La convolución es una operación entre dos funciones que produce otra función y que se define como

$$f(x)*g(x) = \int_0^x f(x-u)g(u) du$$

Nota 27: En los ejercicios y problemas con ecuaciones destinadas a ser resueltas por este método, suelen darse condiciones iniciales, puesto que vemos en la propiedad a) que la propia transformada de la derivada de una función la involucra. Si no se dan

condiciones iniciales en el enunciado, téngase en cuenta que el valor  $y(0)$ , conocido o no, es siempre una constante, y así hay que tratarlo.

3) Tabular cómo actúa en algunos tipos de funciones elementales:

$$L[0]=0 \quad L[1]=\frac{1}{s} \quad L[x^n]=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad L[e^{ax}]=\frac{1}{s-a} \quad L[\text{sen}(ax)]=\frac{a^2}{s^2+a^2}$$

$$L[\cos(ax)]=\frac{s^2}{s^2+a^2} \quad L[x f(x)]=-\frac{d}{ds} F(s) \quad L\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\int_s^\infty F(t) dt$$

$$L[x^n f(x)]=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad L[e^{ax} f(x)]=F(s-a) \quad L[f(ax)]=\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$L[f(x-a)]=e^{-as} F(s)$$

4) Aplicar la transformada a ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$L[y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y] = L[f(x)]$$

Ahora, aplicando las propiedades de la transformada, se llega a una ecuación diferencial o, mejor, algebraica, para  $L[y]$

$$L[y]^{(n-1)} + b_1(s)L[y]^{(n-2)} + \dots + b_n(s)L[y] = g(s) \rightarrow L[y] = F(s)$$

Nota 28: En ocasiones, aplicando las propiedades anteriores, a veces recursivamente, es posible llegar a obtener una ecuación algebraica para  $L[y]$ , de la que sólo hay que despejarla; otras veces, se obtiene una ecuación diferencial para  $L[y]$ , por ejemplo porque

$$L[x f^{(2)}(x)] = -\frac{d}{ds} L[f^{(2)}(x)] = -\frac{d}{ds} (s[sL[f(x)] - f(0)] - f^{(1)}(0))$$

Nota 29: Si la expresión de  $L[y]$  contiene alguna constante, consecuencia de haber resuelto alguna integral indefinida, suele poder determinarse utilizando la propiedad límite e) del punto 3.

5) Aplicación de la transformada inversa (con la información del punto 2) a  $F(s)$

$$L^{-1} L[y] = L^{-1} F(s) \rightarrow y = L^{-1} F(s)$$

Nota 30: A veces, aplicar la transformada inversa requiera un gran trabajo, porque es necesario descomponer la función  $F(s)$  en partes que estén en las tablas. Por ejemplo, una fracción se puede descomponer en fracciones con la *descomposición en fracciones simples*.

Nota 31: Con este método pueden resolverse algunas ecuaciones integrales e integrodiferenciales, lineales o no (véase la nota siguiente). Ejemplo de lineales no homogéneas son

$$y(x) = \text{sen}(2x) + \int_0^x y(t) \text{sen}(2x-2t) dt \quad y \quad y'(x) = 1 - \int_0^x y(x-t) e^{-2t} dt$$

Nota 32: Dado que  $L$  es un operador lineal, su uso en ecuaciones también lineales es más fácil, pero puede ser aplicado siempre que sepamos cómo se comporta  $L$  con cada parte de la ecuación original y podamos construir la nueva ecuación diferencial de  $L[y]$ . Por ejemplo, podría ser que en la ecuación original apareciera la convolución  $y*y'$ , de manera que, como  $L[y*y'] = L[y]L[y'] = L[y][sL[y] - y(0)]$ , se obtendría una ecuación no lineal para  $L[y]$ , lo que no es problema si sabemos resolverla...

3.2.1.4.3. Los métodos presentados en la sección 3.2.1.3., para coeficientes contantes, pueden aplicarse en algunos casos a ecuaciones con coeficientes no constantes, aunque sea para calcular una solución particular de la ecuación completa.

3.2.1.4.3.1. Cuando se conoce la solución general de una ecuación, sea ésta de coeficientes constantes o no, puede aplicarse el **método de variación de las constantes** visto en la sección 3.2.1.3.1., como ya se hizo para la ecuación lineal de primer orden en la sección 3.1.1.1.

3.2.1.4.3.2. También el **método de los coeficientes indeterminados** (3.2.1.3.2.) permite resolver algunas ecuaciones de coeficientes no constantes. Por ejemplo, para ecuaciones de la forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y^{(1)} + a_n y = a x^k,$$

es fácil encontrar una solución probando con  $y = bx^k$  y calculando  $b$  al sustituir esta candidata a solución en la ecuación diferencial. La ecuación anterior es un tipo particular de la ecuación de Euler o Cauchy, que se ven 3.2.1.5. Podría intentar resolverse la ecuación homogénea como se describe allí, o por el método de representación en series, y luego calcular una solución particular de esta forma.

3.2.1.4.3.3. Por último, el **método operacional** que se aplicó en 3.2.1.3.3. podría intentar aplicarse a algunos casos de coeficientes no constantes.

**Grado 1.** Para este caso, es fácil definir cómo debería actuar el operador inverso, porque según lo dicho en 3.1.1.1. (dando el valor nulo a las constantes de la solución general obtenida allí, porque ahora estamos interesados en cualquier solución particular),

$$(D - r(x))y = g(x) \leftrightarrow y' - r(x)y = g(x) \leftrightarrow y = e^{-\int r(x) dx} \int g(x) e^{\int r(x) dx} dx$$

por lo que puede definirse

$$\frac{1}{D - r(x)} g(x) = e^{-\int r(x) dx} \int g(x) e^{\int r(x) dx} dx$$

**Grado 2.** Para las funciones  $b(x)$  y  $c(x)$ , ya no es posible dar una definición general que valga siempre, como mucho para valores de esas funciones tales que exista una solución particular  $y_{pc}(x)$  que sea pueda obtener por un procedimiento general aplicable siempre (no existe para cualesquier  $b(x)$  y  $c(x)$ ). Para estos caso, como

$$(D^2 + b(x)D + c(x))y = g(x) \leftrightarrow y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x) \leftrightarrow y_{pc}(x)$$

habría que definir (para  $b^2(x) - 4c(x) < 0$ , porque las raíces son complejas conjugadas)

$$\frac{1}{D^2 + b(x)D + c(x)} g(x) = y_{pc}(x)$$

**Grado  $n$ .** Para poder extender este método a ecuaciones de orden  $n$ , habría que hacer

$$P(D) = (D - r_1(x)) \cdots (D - r_{n_1}(x)) (D^2 + b_1(x)D + c_1(x)) \cdots (D^2 + b_{n_2}(x)D + c_{n_2}(x))$$

y después demostrar que hay un resultado teórico equivalente al del caso de coeficientes constantes, es decir, un resultado que garantice que se obtendría el mismo resultado al utilizar un operador como  $P(D)$  o la composición o suma de los operadores correspondientes a los factores en que se puede descomponer  $P(D)$  (ver el teorema 6.6 de la sección 6.7 del volumen 2 del libro *Cálculus*, de Tom M. Apostol, válido para el caso de coeficientes constantes). Un resultado así establecería una correspondencia uno a uno entre los polinomios (en  $D$ ) con coeficientes no constantes (en  $x$ ) y los operadores que consisten en aplicar derivaciones (respecto a  $x$ ) y después multiplicar por los coeficientes no constantes (dependientes de  $x$ ). A la vista de la demostración del caso de coeficientes constantes, que ocupa unas líneas, parece que el resultado se puede demostrar también para este caso considerando que un polinomio con coeficientes no constantes se puede escribir como serie infinita de potencias, por lo que el principal problema al extender el método operacional para este caso de coeficientes no constantes sería la inexistencia de un procedimiento general para los polinomios de grado dos, problema que desaparece si se trabaja con números complejos... No obstante, yo no he visto este resultado en los libros que he manejado, por lo que habría que buscarlo o demostrarlo antes de utilizarlo con polinomios de grado mayor a dos (es decir, a ecuaciones de orden mayor a dos).

Nota 33: Si estuviésemos trabajando con números complejos, como el *teorema fundamental del álgebra* garantizaría la existencia de  $n$  raíces complejas (alguna puede ser múltiple), bastaría con definir el inverso del operador  $D - r(x)$ .

Nota 34: Suele presentarse el método operacional sólo para el caso de coeficientes constantes (3.2.1.3.3.) y polinomios con raíces reales distintas, dado que aunque exista la posibilidad de extenderlo al caso de algunas ecuaciones de coeficientes no constantes, como se ha descrito ahora, en la práctica el método operacional es costoso de aplicar si no se hace de forma mecánica y rápida.

3.2.1.4.4. Método **para calcular una solución conocida otra** (caso  $n = 2$ ). Si ya se conoce una solución de una ecuación de orden 2, esta información puede utilizarse para calcular una segunda solución que sea independiente a la primera. La intuición parece indicar que, conocida una solución no nula  $y_1(x)$ , una función de la forma  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  puede ser suficientemente parecida como para ser solución, pero independiente, por no ser un múltiplo (el coeficiente depende de  $x$ ). La intuición orienta pero no demuestra, cosa que hace el wronskiano,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & u y_1 \\ y_1' & u' y_1 + u y_1' \end{vmatrix} = u' y_1^2 + u y_1 y_1' - u y_1 y_1' = u' y_1^2$$

porque, dado que suponemos que  $y_1$  no es la solución trivial 0, se tiene que  $y_2$  es independiente de  $y_1$  si, y sólo si,  $u$  no es una constante. Haciendo el cambio  $y(x) = u(x)y_1(x)$ ,

$$\begin{cases} y = u y_1 \\ y^{(1)} = u^{(1)} y_1 + u y_1^{(1)} \\ y^{(2)} = u^{(2)} y_1 + 2u^{(1)} y_1^{(1)} + u y_1^{(2)} \end{cases}$$

la ecuación  $y^{(2)} + a_1(x)y^{(1)} + a_2(x)y = f(x)$  queda

$$u[y_1^{(2)} + a_1(x)y_1^{(1)} + a_2(x)y_1] + u^{(2)}y_1 + u^{(1)}[2y_1^{(1)} + a_1(x)y_1] = f(x)$$

que, dado que  $y_1$  es solución, se convierte en

$$u^{(2)}y_1 + u^{(1)}[2y_1^{(1)} + a_1(x)y_1] = 0 \rightarrow \frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} = -2\frac{y_1^{(1)}}{y_1} - a_1(x)$$

$$\int \frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} dx = -2 \int \frac{y_1^{(1)}}{y_1} dx - \int a_1(x) dx \rightarrow \log(u^{(1)}) = -2 \log(y_1) - \int a_1(x) dx$$

$$u^{(1)} = y_1^{-2} e^{-\int a_1(x) dx} \rightarrow u = \int y_1^{-2} e^{-\int a_1(x) dx} dx$$

Nota 35: Este método recuerda al de variación de las constantes del apartado 3.2.1.3.1.



### 3.2.1.5. Método para resolver la ecuación lineal de coeficientes no constantes de Euler o Cauchy

Es una ecuación cuyos coeficientes son monomios cuyo grado coincide con el orden de la derivada a la que va multiplicando:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y^{(1)} + a_n y = f(x).$$

Para un intervalo contenido en  $x > 0$ , el cambio de variable  $x = e^t$  convierte la ecuación anterior en una de coeficientes constantes (3.2.1.3.), porque  $t = \log(x)$  y, si se consideran productos del operador derivada respecto a  $t$  y se aplica una demostración por inducción,

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = x^{-1} \frac{d}{dt} y \\ y^{(2)} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot x^{-2} - \frac{dy}{dt} \cdot x^{-2} = x^{-2} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) y \\ y^{(3)} = \dots = x^{-3} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \left( \frac{d}{dt} - 2 \right) y \\ \vdots \\ y^{(n)} = \dots = x^{-n} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \dots \left( \frac{d}{dt} - (n-1) \right) y \end{array} \right.$$

Es útil tanto saber desarrollar los tres primeros casos como aprender de memoria esta última expresión. Después de aplicar el cambio de variable, la nueva variable independiente es  $t$  y la dependiente  $y(t)$ . La ecuación se ha convertido en una de coeficientes constantes del tipo 3.2.1.3. Una vez resuelta la ecuación, no hay que olvidar deshacer el cambio de variable con  $y(x) = y(\ln(x))$ .

Nota 36: Si  $f(x)$  tiene sentido para valores  $x < 0$ , conviene también buscar soluciones mediante el cambio  $x = -e^t$ .



### 3.2.1.6. Métodos para resolver la ecuación lineal de coeficientes no constantes de Legendre

Esta ecuación es más general que la anterior 3.2.1.5., a la que incluye como caso particular:

$$(\alpha x + \beta)^n y^{(n)} + a_1 (\alpha x + \beta)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (\alpha x + \beta) y^{(1)} + a_n y = f(x).$$

3.2.1.6.1. Una forma de resolver esta ecuación es aplicando un cambio de variable análogo al que se hizo en 3.2.1.5., esto es,  $\alpha x + \beta = e^t$ , válido para intervalos contenidos en la región  $\alpha x + \beta > 0$ , siempre que  $f(x)$  tenga sentido en esta misma región. Este cambio la convertirá también en una ecuación del tipo 3.2.1.3. Al final, una vez resuelta, no hay que olvidar deshacer todos los cambios de variable que se hayan hecho.

Nota 37: Si  $f(x)$  tiene sentido para valores  $\alpha x + \beta < 0$ , conviene también buscar soluciones mediante el cambio  $\alpha x + \beta = -e^t$ .

3.2.1.6.2. Otra forma forma de resolver esta ecuación es aplicando el cambio de variable  $\alpha x + \beta = z$ , que la convertirá en una ecuación del tipo anterior de Euler o Cauchy, 3.2.1.5., porque

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(1)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \alpha \frac{dy}{dz} \\ y^{(2)} = \frac{d}{dx} \left( \alpha \frac{dy}{dz} \right) = \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dz} \right) = \alpha^2 \frac{d^2 y}{dz^2} \\ \vdots \\ y^{(n)} = \dots = \alpha^n \frac{d^n y}{dz^n} \end{array} \right.$$

Después de aplicar el cambio de variable, la nueva variable independiente es  $z$  y la dependiente  $y(z)$ . Al final, una vez resuelta, no hay que olvidar deshacer todos los cambios de variable que se hayan hecho.



### 3.2.1.7. Método para, conocida una solución, reducir el orden de una ecuación lineal homogénea de coeficientes no constantes

Si ya se conoce una solución  $y_1$  de una ecuación de orden  $n$ , esta información puede utilizarse para obtener una ecuación diferencial cuyo orden es  $n-1$  y cuya variable es  $z = dy/dx$ . Haciendo el siguiente cambio  $y(x)=u(x)y_1(x)$ , se tiene

$$\begin{cases} y = u y_1 \\ y^{(1)} = u^{(1)} y_1 + u y_1^{(1)} \\ y^{(2)} = u^{(2)} y_1 + 2u^{(1)} y_1^{(1)} + u y_1^{(2)} \\ \vdots \end{cases}$$

y, al sustituir en la ecuación  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ , reordenar los términos y utilizar que  $y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y_1 = 0$ , se obtiene una ecuación diferencial lineal homogénea equivalente de orden  $n-1$  y variable  $z = dy/dx$

Nota 38: Si  $n = 2$ , se llega a una ecuación de grado uno que solemos saber resolver.



### 3.2.2. De grado $m$ en $y^{(n)}$

#### 3.2.2.1. Método para reducir el orden en las ecuaciones del tipo $F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

En estas ecuaciones no aparece la variable  $x$ . Se resuelve aplicando el cambio de variables  $y' = p$ . Como no aparece la  $x$ , para sustituir las derivadas en la ecuación original es necesario calcularlas aplicando la regla de la cadena y dejarlas en función de  $p$  e  $y$ , sin la  $x$ :

$$y^{(2)} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p \quad y^{(3)} = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p \quad y^{(4)} = \dots$$

Al final del proceso, se sustituye en la ecuación original y se obtiene

$$G(y, p, p^{(1)}, \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

Esta ecuación diferencial es de orden  $n-1$ , es decir, el orden se ha reducido en una unidad. Su resolución, por alguno de los otros métodos, llevaría a encontrar  $p(y)$ . Después habría que deshacer el cambio

$$\frac{dy}{dx} = p(y) \rightarrow dx = \frac{1}{p(y)} dy \rightarrow x = \int \frac{1}{p(y)} dy + c$$

Finalmente, si se desea y es posible, se podría despejar  $y = g(x)$ .



#### 3.2.2.2. Método para reducir el orden en las ecuaciones del tipo $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

En estas ecuaciones no aparece la variable  $y$ . Se resuelve aplicando el cambio de variables  $y^{(k)} = p$ . Se obtiene una ecuación del tipo

$$G(x, p, p^{(1)}, \dots, p^{(n-k)})=0$$

Esta ecuación diferencial es de orden  $n-k$ , es decir, el orden se ha reducido en  $k$  unidades. Su resolución, por alguno de los otros métodos, llevaría a encontrar  $p(x)$ . Ahora, la ecuación  $y^{(k)}(x)=p(x)$  es del tipo 3.2.1.1.



### 3.2.2.3. Método para reducir el orden en ecuaciones homogéneas en $y, y', \dots$

Estas ecuaciones son aquellas de la forma  $F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})=0$  en que se verifica que  $F$  es una función homogénea de grado  $k$  con respecto a las variables distintas de  $x$ , esto es,

$$F(x, ay, ay^{(1)}, \dots, ay^{(n)})=a^k F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$$

En esta ecuación, se divide por  $y^k$ , con lo que se obtiene que la función sea homogénea de grado 0

$$F\left(x, \frac{y}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right)=0$$

Ahora se aplica el cambio de variable  $z=\frac{y^{(1)}}{y}$ , lo que implica que

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= zy & y^{(2)} &= z^{(1)}y + zy^{(1)} = z^{(1)}y + z^2y = (z^{(1)} + z^2)y \\ y^{(3)} &= (z^{(2)} + 2zz^{(1)})y + (z^{(1)} + z^2)y^{(1)} = (z^{(2)} + 2zz^{(1)})y + (z^{(1)} + z^2)zy = (z^{(2)} + 3zz^{(1)} + z^3)y & y^{(4)} &= \dots \end{aligned}$$

Entonces, al sustituir

$$\frac{y^{(1)}}{y} = z \quad \frac{y^{(2)}}{y} = z^{(1)} + z^2 \quad \frac{y^{(3)}}{y} = z^{(2)} + 3zz^{(1)} + z^3 \quad y^{(4)} = \dots$$

en la ecuación, se obtiene una ecuación con un orden  $n-1$  en  $z$ :

$$G(x, z, z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)})=0$$



### 3.2.2.4. Método para reducir el orden en ecuaciones homogéneas en $x, y, dx, dy, d^2x, \dots$

Estas ecuaciones son aquellas de la forma  $F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots, d^nx, d^ny)=0$  en que se verifica que  $F$  es una función homogénea de grado  $k$  con respecto a las variables distintas de  $x$ , esto es,

$$F(ax, ay, adx, ady, a d^2x, a d^2y, \dots, a d^nx, a d^ny)=a^k F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots, d^nx, d^ny)$$

En esta ecuación, se divide por  $x^k$ , con lo que se obtiene que la función sea homogénea de grado 0,

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{dx}{x}, \frac{dy}{x}, \frac{d^2x}{x}, \frac{d^2y}{x}, \dots, \frac{d^nx}{x}, \frac{d^ny}{x}\right)=0$$

Ahora se aplica el cambio de variable  $\begin{cases} x=e^t \\ y=ze^t \end{cases}$  (este cambio sólo es válido para  $x > 0$ ; sin embargo, si una función es homogénea respecto a  $x$ , los valores que toma para  $-x$  quedan determinados), con lo que

$$y=xz$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x \rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} z + x \frac{dz}{dt} = x \left( z + \frac{dz}{dt} \right) \rightarrow \frac{dy}{x} = z dt + dz$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (e^t) = e^t = x \rightarrow \frac{d^2 x}{x} = dt^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left[ x \left( z + \frac{dz}{dt} \right) \right] = \frac{dx}{dt} \left( z + \frac{dz}{dt} \right) + x \left( \frac{dz}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = x \left( z + 2 \frac{dz}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{d^2 y}{x} = dt^2 \left( z + 2 \frac{dz}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = dt^2 z + 2 dz dt + d^2 z \end{aligned}$$

⋮

Entonces, al sustituir estas cantidades en la ecuación, se obtiene una ecuación cuyas variables son  $t$  y  $z$ :

$$J(z, z^{(1)}, \dots, z^{(n)}) = 0$$

Como  $t$  no aparece explícitamente, esta ecuación es del tipo 3.2.2.1. y, por tanto, se puede reducir su orden en una unidad. En el apéndice A.3. se ha incluido un enlace a un documento sobre las distintas notaciones utilizadas en Cálculo Diferencial.



## 4. Búsqueda de ecuaciones: de la función a la ecuación

Dada una familia multiparamétrica de curvas  $f(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ , donde  $x$  es la variable independiente,  $y$  la dependiente y  $c_k$  constantes o parámetros que determinan la familia de curvas, el siguiente sistema, formado por las derivadas implícitas de  $f$  con respecto a  $x$ ,

$$\begin{cases} f(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0 \\ f_1(x, y, y^{(1)}, c_1, \dots, c_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}, c_1, \dots, c_n) = 0 \end{cases}$$

debe permitir construir una sola ecuación donde no aparezca ninguna de las constantes  $c_k$ :

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad [1]$$

ó

$$G(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = g(x) \quad [2]$$

Si la familia de funciones está dada en forma explícita,  $y = f(x, c_1, \dots, c_n)$ , en vez de implícita  $f(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ , se procede igual (véase el ejemplo 3 de más abajo).

Ejemplo 1: Familia de circunferencias centradas en el origen

$$x^2 + y^2 = c \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ 2x + 2y y^{(1)} = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 2y y^{(1)} = 0 \rightarrow y^{(1)} = -\frac{x}{y}$$

Ejemplo 2: Familia de circunferencias con el centro en el eje  $x$  y tangentes al eje  $y$

$$x^2 + y^2 = cx \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = cx \\ 2x + 2y y^{(1)} = c \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xy y^{(1)} \rightarrow y^{(1)} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Ejemplo 2: Familia de parábolas

$$x^2 + y^2 = cx \rightarrow \begin{cases} y = c_1(x - c_2)^2 \\ y^{(1)} = 2c_1(x - c_2) \\ y^{(2)} = 2c_1 \end{cases} \rightarrow \frac{y}{(y^{(1)})^2} = \frac{1}{4c_1} = \frac{1}{2y^{(2)}} \rightarrow 2y y^{(2)} = (y^{(1)})^2$$

Nota 39: Al dividir por  $x$  e  $y$ , se supone que se busca la solución lejos de  $x = 0$  y donde  $y$  no se anule.

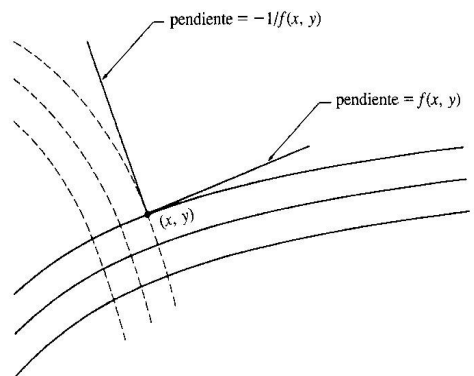


## 5. Familias ortogonales de funciones (caso $n = 1$ )

En esta sección se incluye una aplicación de los conocimientos adquiridos en las secciones 4 y 5. Dada una familia uniparamétrica de curvas  $y_1 = f_1(x, c)$  (forma explícita) que verifica la ecuación diferencial ordinaria  $F(x, y, y') = 0$ , entonces la familia  $y_2 = f_2(x, c)$  que es solución general de la ecuación

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0,$$

es perpendicular a la familia  $y_1$ . Véase la figura siguiente, tomada del libro de Simmons:



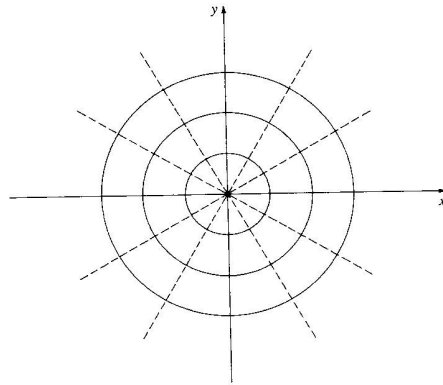
Nota 40: El que la ecuación diferencial de la familia perpendicular a una dada resulte de sustituir  $y'$  por  $-1/y'$  en la ecuación de esta primera familia dada, se debe a que, en dos dimensiones, uno de los dos vectores perpendiculares al que tiene componentes  $(a, b)$  es el vector  $(-b, a)$ .

Ejemplo 1: Familia de circunferencias centradas en el origen y familia de rectas que pasan por el origen

$$x^2 + y^2 = c \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = c \\ 2x + 2y y^{(1)} = 0 \end{cases} \rightarrow 2x + 2y y^{(1)} = 0 \rightarrow y^{(1)} = -\frac{x}{y}$$

$$-\frac{1}{y^{(1)}} = -\frac{x}{y} \rightarrow -\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{y} dy \rightarrow \log(y) = \log(x) + c_1 \rightarrow e^{\log(y)} = e^{\log(x)} \cdot e^{c_1} \rightarrow y = c x$$

Las dos familias de funciones se representan en la siguiente figura, tomada del libro de Simmons:



**Ejemplo 2:** Familia de circunferencias con el centro en el eje  $x$  y tangentes al eje  $y$  y familia de circunferencias con el centro en el eje  $y$  y tangentes al eje  $x$

$$x^2 + y^2 = cx \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = cx \\ 2x + 2y y^{(1)} = c \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 2x^2 + 2xy y^{(1)} \rightarrow y^{(1)} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$-\frac{1}{y^{(1)}} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \rightarrow y^{(1)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Como esta ecuación diferencial es homogénea (3.1.1.3.), aplicando el cambio de variable  $y = xv$

$$v + x v^{(1)} = \frac{2x^2 v}{x^2 - x^2 v^2} \rightarrow \frac{1 - v^2}{v + v^3} dv = \frac{1}{x} dx \rightarrow \log\left(\frac{v}{1 + v^2}\right) = \log(x) + c_1$$

$$\log\left(\frac{v}{1 + v^2}\right) = \log(x) + c_1 \rightarrow e^{\log\left(\frac{v}{1 + v^2}\right)} = e^{\log(x)} \cdot e^{c_1} \rightarrow \frac{v}{1 + v^2} = c_2 x \rightarrow \frac{v}{1 + v^2} = c_2 x$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = c_2 \rightarrow x^2 + y^2 = cy$$

Se ha utilizado que

$$\int \frac{1 - v^2}{v + v^3} dv = \int \frac{1}{v + v^3} dv - \int \frac{v}{1 + v^2} dv = \log(v) - \frac{1}{2} \log(1 + v^2) - \frac{1}{2} \log(1 + v^2) = \log\left(\frac{v}{1 + v^2}\right)$$

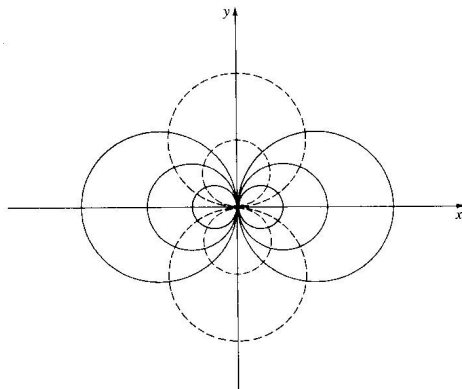
porque

$$\int \frac{1}{v + v^3} dv = \int \frac{1}{v} dv - \int \frac{v}{1 + v^2} dv = \log(v) - \frac{1}{2} \log(1 + v^2) \quad \text{y} \quad \int \frac{v}{1 + v^2} dv = \frac{1}{2} \log(1 + v^2)$$

ya que, descomponiendo en fracciones simples, dado que es una integral racional,

$$\frac{1}{v + v^3} = \frac{1}{v(1 + v^2)} = \frac{A}{v} + \frac{Bv + C}{1 + v^2} = \dots = \frac{1}{v} - \frac{v}{1 + v^2}$$

Las dos familias de funciones se representan en la siguiente figura, tomada del libro de Simmons (en este libro estos cálculos se hacen en coordenadas polares, no rectangulares):



Nota 41: Se han utilizado las propiedades del logaritmo que dicen que  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$  y  $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$ , porque  $\log(a^n) = n\log(a)$ . Quien quiera repasar los métodos para resolver integrales puede consultar <http://www.Casado-D.org/edu/NotasAnálisis.pdf>.



## A. Apéndices

### A.1. Sobre la adición de una constante al resolver cada integral indefinida

En rigor, debe añadirse una constante cada vez que se resuelve una integral indefinida. Sin embargo, en esta asignatura no siempre se hace, sobre todo en pasos intermedios. Hay varios posibles motivos, dependiendo del caso:

- (a) A veces se llega a soluciones equivalentes: si una función es solución de una ecuación lineal, sumar un múltiplo de una solución particular de la homogénea o considerar otra solución particular distinta de la ecuación ampliada llevan a la misma familia de soluciones general de la ecuación completa
- (b) Cuando se busca una solución particular, es posible –e inteligente– omitirla, es decir, darle el valor particular 0. Por ejemplo, véase cómo al resolver las ecuaciones lineales, 3.1.1.1., hay textos que directamente prescinden de  $c_1$ , lo que equivale a darle el valor 0 o a dar el valor 1 a  $c_2$ ; esto no tiene repercusión, porque vemos al final que  $c_2$  se cancela en el primer sumando y forma parte de otra constante en el segundo sumando, lo que además concuerda con lo dicho en el punto (a) anterior; sin embargo, nótese que al resolver la ecuación de la  $v$  sí hay que añadir la constante  $c_3$ . Nótese que en los casos de ecuaciones no lineales, que son mayoría en el documento, el objetivo suele ser calcular sólo una solución particular.
- (c) Cuando hay varias integrales indefinidas (con respecto a la misma variable independiente) en términos lineales de una ecuación, aunque habría que añadir una constante al calcular cada una de estas integrales, se puede pensar que las constantes van quedando implícitas en las integrales que quedan por resolver, con lo que se añadiría añadir una constante sólo al resolver la última. Esto es posible sólo si todas las integraciones se han de hacer con respecto a la misma variable.

Esto, el añadir a veces constantes y a veces no, puede crear confusión; se puede memorizar cuándo puede omitirse, razonarlo o, alternativamente, añadirla siempre e ir arrastrándola (aunque pueden complicarse ligeramente los cálculos intermedios). En la mayoría de libros no suele mencionarse siquiera este detalle.



## A.2. Algunas observaciones generales

Con el fin de organizar un poco la información, en la sección 3. hemos clasificado las series primero por el orden, luego por el grado, luego por la linealidad, y finalmente por otros criterios. Ahora, para poder sacarles más provecho a los métodos que allí se presentaban, hacemos algunas observaciones:

- (a) Las expresiones de algunas ecuaciones se han dado con gran generalidad, en términos de funciones genéricas  $F, G, f$  ó  $g$ . Como estas funciones pueden tener propiedades compatibles con otros criterios, como que sean funciones homogéneas o de variables separadas, puede haber ecuaciones que pertenezcan a varios tipos o que se puedan resolver por métodos distintos. Por ejemplo, pueden tener grado  $m$  ó 1, o ser de funciones homogéneas. Por otro lado, el que aquí se presenten métodos para algunos tipos de ecuaciones no significa que no existan otros métodos que también las resuelvan.
- (b) En general, como se han visto varios métodos para algunos tipos de funciones, pueden resolverse por más de uno. Por ejemplo,  $y'' + y = 0$  puede resolverse por el método de las lineales homogéneas con coeficientes constantes (3.2.1.2.), por el método de representación en series (3.2.1.4.1.) o por el de la transformada de Laplace (3.2.1.4.2.),  $y' = 2xy$  puede resolverse por el método de variables separadas (3.1.1.2.) o también por el representación en series (3.2.1.4.1.), y las ecuaciones de Euler o Cauchy (3.2.1.5.) pueden resolverse por el método de representación en series (3.2.1.4.1.).
- (c) Las ecuaciones homogéneas de la forma (3) de la introducción, son un caso particular de las no homogéneas de la forma (2), por lo que los métodos dados para ecuaciones no homogéneas son aplicables también a las homogéneas, aunque, dado que estos últimos están destinados a hallar una solución particular de la ecuación completa, puede que sólo sean capaces de hallar una solución particular de la homogénea (después hay un método para, conocida una solución, hallar otra independiente) o incluso la solución trivial nula (método operacional, por ejemplo).
- (d) Algunos de los métodos dados para ecuaciones de orden  $n$  son aplicables a las de orden 1, aunque debido a que estas últimas son más sencillas ya disponen de sus métodos propios. Por ejemplo, el método de Laplace (3.2.1.4.2.) puede también ser aplicado a ecuaciones de orden 1, caso que de hecho suele llevar a una ecuación algebraica, no diferencial; o los métodos que reducen en un grado el orden de la ecuación, que, aplicados a una que es de orden 1, suelen llevar a su solución (compárense 3.2.2.1. y 3.2.2.2. con 3.1.2.2. y 3.1.2.3., respectivamente).
- (e) Algunos de los métodos dados para ecuaciones de grado  $m$  son aplicables a las de grado 1, aunque debido a que estas últimas son más sencillas ya disponen de sus métodos propios. Nada impide aplicar los métodos de 3.2.2.1., 3.2.2.2., 3.1.2.2. y 3.1.2.3. a ecuaciones de grado 1.
- (f) Los métodos dados para las ecuaciones de coeficientes no constantes son aplicables a las ecuaciones de coeficientes constantes, como caso particular que son (por ejemplo, como se ha dicho  $y'' + y = 0$  puede ser resuelta por el método de representación en series de potencias); aunque, de nuevo, dado que estas últimas son más sencillas disponen de métodos propios.



## A.3. Notaciones en el Cálculo Diferencial

El lector interesado en las notaciones más frecuentes que se suelen utilizar para las derivadas y los diferenciales clásicos, puede consultar <http://www.Casado-D.org/edu/NotacionesCalculoDiferencial.pdf>





Universidad Complutense de Madrid

└ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

└ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II

└ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012