



Notas de Física general

1. Cinemática de una partícula

- 1.1. Introducción
- 1.2. Conceptos básicos
- 1.3. Conceptos básicos en coordenadas rectangulares o cartesianas
- 1.4. Algunos conceptos básicos en coordenadas cilíndricas (y polares)
- 1.5. Algunos conceptos básicos en coordenadas esféricas
- 1.6. Media temporal de algunos conceptos
- 1.7. Algunos movimientos
 - 1.7.1. Movimiento rectilíneo
 - 1.7.2. Movimiento rectilíneo uniforme
 - 1.7.3. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
 - 1.7.4. Movimiento circular
 - 1.7.5. Movimiento circular uniforme
 - 1.7.6. Movimiento circular uniformemente acelerado
 - 1.7.7. Movimiento armónico simple
 - 1.7.8. Movimiento ondulatorio
- 1.8. Transformación de Galileo
- 1.9. Sistemas inerciales
- 1.10. Mecánica Relativista
 - 1.10.1. Transformación de Lorentz

2. Cinemática de un sistema de partículas

- 2.1. Introducción
- 2.2. Centro de masas
- 2.3. Sólido rígido (parte 1 de 3)

3. Dinámica de una partícula

- 3.1. Introducción
- 3.2. Momento lineal o cantidad de movimiento
- 3.3. Leyes de Newton
 - 3.3.1. Principio de conservación del momento lineal
- 3.4. Impulso mecánico
- 3.5. Fuerzas de inercia o ficticias
- 3.6. Momento angular
 - 3.6.1. Principio de conservación del momento angular
- 3.7. Impulso angular
- 3.8. Cuerdas, hilos o cables
- 3.9. Fuerzas restauradoras (parte 1 de 2)
- 3.10. Mecánica Relativista

4. Dinámica de un sistema de partículas

- 4.1. Introducción
- 4.2. Momento lineal o cantidad de movimiento
- 4.3. Leyes de Newton
 - 4.3.1. Principio de conservación del momento lineal
- 4.4. Choques y explosiones
- 4.5. Masa dependiente del tiempo
- 4.6. Impulso mecánico de un sistema
- 4.7. Momento angular de un sistema
 - 4.7.1. Teorema de conservación del momento angular
- 4.8. Impulso angular de un sistema
- 4.9. Presión
- 4.10. Sólido rígido (parte 2 de 3)
 - 4.10.1. Conservación del momento angular
 - 4.10.2. Impulsos mecánico y angular de un sólido rígido

[5. Energía, trabajo y potencia para una partícula](#)

[5.1. Introducción](#)

[5.2. Trabajo](#)

[5.3. Superposición](#)

[5.4. Trabajo de la fuerza total y energía cinética: dependencia de la velocidad](#)

[5.5. Fuerzas conservativas y energía potencial](#)

[5.6. Trabajo de las fuerzas conservativas y energía potencial: dependencia de la posición](#)

[5.7. Trabajo de las fuerzas no conservativas y energía mecánica: dependencia de la velocidad y la posición](#)

[5.7.1. Principio de conservación de la energía \(mecánica\)](#)

[5.8. Potencia](#)

[5.9. Ligaduras energéticas](#)

[5.10. Fuerzas restauradoras \(parte 2 de 2\)](#)

[5.11. Mecánica relativista](#)

[6. Energía, trabajo y potencia para un sistema de partículas](#)

[6.1. Trabajo](#)

[6.2. Superposición](#)

[6.3. Trabajo de la fuerza total y energía cinética: dependencia de la velocidad](#)

[6.4. Trabajo de las fuerzas conservativas y energía potencial: dependencia de la posición](#)

[6.4.1. Conservación de la energía mecánica propia](#)

[6.4.2. Conservación de la energía potencial externa](#)

[6.5. Trabajo de las fuerzas no conservativas y energía mecánica: dependencia de la velocidad y la posición](#)

[6.5.1. Conservación de la energía mecánica \(total\)](#)

[6.6. Fuerzas no conservativas, temperatura, calor y primer principio de la Termodinámica](#)

[6.6.1. Primer Principio de la Termodinámica](#)

[6.7. Energías en otro sistema inercial \(por ejemplo, el del centro de masas\)](#)

[6.8. Potencia](#)

[6.9. Ligaduras energéticas](#)

[6.10. Sólido rígido \(parte 3 de 3\)](#)

[7. Campo gravitatorio](#)

[7.1. Introducción](#)

[7.2. Campos vectoriales](#)

[7.3. Campos escalares](#)

[7.4. Relación entre campos vectoriales y escalares](#)

[7.5. Principio de superposición](#)

[7.6. Energía potencial, potencial y trabajo \(caso de dos masas \$M\$ y \$m\$ \)](#)

[7.7. Teorema de Gauss](#)

[7.8. Cálculo de los campos vectoriales y escalares](#)

[7.9. Movimiento en un campo gravitatorio](#)

[7.10. Peso](#)

[7.11. Energía potencial en la superficie de la Tierra](#)

[8. Campo electrostático](#)

[8.1. Introducción](#)

[8.2. Campos vectoriales](#)

[8.3. Campos escalares](#)

[8.4. Relación entre campos vectoriales y escalares](#)

[8.5. Principio de superposición](#)

[8.6. Energía potencial, potencial y trabajo \(caso de dos cargas \$Q\$ y \$q\$ \)](#)

[8.7. Teorema de Gauss](#)

[8.8. Cálculo de los campos vectoriales y escalares](#)

[8.9. Movimiento en un campo electrostático](#)

[8.10. Ecuaciones de Maxwell](#)

[9. Campo magnetostático](#)

[9.1. Introducción](#)

[9.2. Fuerza magnética](#)

[9.3. Inducción magnética](#)

[9.4. Cálculo de los campos vectoriales](#)

[9.5. Movimiento en un campo magnetostático](#)

[9.6. Ecuaciones de Maxwell](#)

10. Campo electromagnético

10.1. Introducción

10.2. Ecuaciones constitutivas

10.3. Ecuaciones de Maxwell

10.4. Condiciones de contorno

10.5. Ecuación de onda

10.6. Potenciales escalar y vectorial

10.7. Principio de superposición

10.8. Leyes de conservación

10.8.1. Conservación de la carga

10.8.2. Conservación de la energía

10.8.3. Conservación del momento lineal

10.9. Movimiento en un campo electromagnético

10.10. Campos electrostático y magnetostático

A. Apéndice

A.1. Notación en el Cálculo Diferencial

1. Cinemática de una partícula

1.1. Introducción

Estudia el movimiento de una partícula sin tener en cuenta su causa. Suele hacerse la simplificación de suponer que una partícula tiene volumen nulo (cuando éste es despreciable con respecto a las distancias típicas del sistema), por lo que sólo tiene sentido considerar su movimiento de traslación, no el de rotación. A diferencia de la Cinemática, la Dinámica estudia las causas de los movimientos: las fuerzas. Las partículas ofrecen una resistencia a ser aceleradas que involucra el concepto de *masa inercial*. En el tema de Dinámica se entenderá este concepto, aunque también se menciona en la sección de cinemática de un sistema de partículas.



1.2. Conceptos básicos

Vector *posición instantánea*

$$\vec{r}(t)$$

$$r(t) = |\vec{r}(t)|$$

Vector *velocidad instantánea*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

Vector *aceleración instantánea*

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)|$$



1.3. Conceptos básicos en **coordenadas rectangulares o cartesianas**: $(x(t), y(t), z(t))$

Base de vectores ortonormales

$$\begin{cases} \vec{e}_x = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_y = (0, 1, 0) \\ \vec{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Nota: Estos vectores no dependen del tiempo

Vector *posición instantánea*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

Vector *velocidad instantánea*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

Vector *aceleración instantánea*

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{e}_z = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$$



1.4. Algunos conceptos básicos en **coordenadas cilíndricas (y polares)**: $(d(t), \theta(t), z(t))$

Base de vectores ortonormales

$$\begin{cases} \vec{e}_d(t) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t), 0) \\ \vec{e}_\theta(t) = (-\operatorname{sen} \theta(t), \cos \theta(t), 0) \\ \vec{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Nota: Los dos primeros vectores de esta base dependen del tiempo, es decir, cambian con él. Nótese que el sentido del vector radial es saliente, hacia el exterior, y que

$$\frac{d\vec{e}_d(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_\theta(t), \quad \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_d(t) \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$$

Vector *posición instantánea*

$$\vec{r}(t) = d(t)\vec{e}_d(t) + z(t)\vec{e}_z$$

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{d(t)^2 + z(t)^2}$$

Vector *velocidad instantánea*

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d d(t)}{dt} \vec{e}_d(t) + d(t) \frac{d \vec{e}_d(t)}{dt} + \frac{d z(t)}{dt} \vec{e}_z \\ &= \frac{d d(t)}{dt} \vec{e}_d(t) + d(t) \frac{d \theta(t)}{dt} \vec{e}_\theta(t) + \frac{d z(t)}{dt} \vec{e}_z \\ &= v_d(t) \vec{e}_d(t) + v_\theta(t) \vec{e}_\theta(t) + v_z(t) \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_d(t) = \frac{d d(t)}{dt} \\ v_\theta(t) = d(t) \frac{d \theta(t)}{dt} \\ v_z(t) = \frac{d z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$v(t) = \sqrt{v_d(t)^2 + v_\theta(t)^2 + v_z(t)^2}$$

Vector aceleración instantánea

$$\vec{a}(t) = \dots = a_d(t) \vec{e}_d(t) + a_\theta(t) \vec{e}_\theta(t) + a_z(t) \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} a_d(t) = \dots \\ a_\theta(t) = \dots \\ a_z(t) = \dots \end{cases}$$

$$a(t) = \sqrt{a_d(t)^2 + a_\theta(t)^2 + a_z(t)^2}$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles para algunas trayectorias:

- En la superficie del cilindro (circulares, verticales o helicoidales, p.ej.): $d(t) = d(0)$
- En un plano vertical que contiene al eje Z (radiales o verticales, p.ej.): $\theta(t) = \theta(0)$
- Trayectorias en un plano horizontal (circulares, p.ej.): $z(t) = z(0)$

Relación con las coordenadas rectangulares:

$$\begin{cases} x(t) = d(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = d(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\ z(t) = z(t) \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} d(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \\ \theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$

Coordenadas polares: son un caso particular de las cilíndricas en las que $z(t) = 0$.



1.5. Algunos conceptos básicos en **coordenadas esféricas:** $(\rho(t), \theta(t), \phi(t))$

Base de vectores ortonormales

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho(t) = (\cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t), \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t), \cos \phi(t)) \\ \vec{e}_\theta(t) = (-\operatorname{sen} \theta(t), \cos \theta(t), 0) \\ \vec{e}_\phi(t) = (\cos \theta(t) \cos \phi(t), \operatorname{sen} \theta(t) \cos \phi(t), -\operatorname{sen} \phi(t)) \end{cases}$$

Nota: El sentido del vector radial es saliente, hacia el exterior

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_\rho(t)}{dt} &= \frac{d\theta(t)}{dt} \operatorname{sen}\phi(t)\vec{e}_\theta(t) + \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi(t) \\ \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} &= -\frac{d\theta(t)}{dt} \operatorname{sen}\phi(t)\vec{e}_\rho(t) - \frac{d\theta(t)}{dt} \cos\phi(t)\vec{e}_\phi(t) \\ \frac{d\vec{e}_\phi(t)}{dt} &= -\frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\rho(t) + \frac{d\theta(t)}{dt} \cos\phi(t)\vec{e}_\theta(t)\end{aligned}$$

Vector posición instantánea

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \rho(t)\vec{e}_\rho(t) \\ r(t) &= |\vec{r}(t)| = \rho(t)\end{aligned}$$

Vector velocidad instantánea

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \frac{d\vec{e}_\rho(t)}{dt} \\ &= \frac{d\rho(t)}{dt} \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \operatorname{sen}\phi(t)\vec{e}_\theta(t) + \rho(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \vec{e}_\phi(t)\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\rho(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} \\ v_\theta(t) = \rho(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \operatorname{sen}\phi(t) \\ v_\phi(t) = \rho(t) \frac{d\phi(t)}{dt} \end{array} \right.$$

$$v(t) = \sqrt{v_\rho(t)^2 + v_\theta(t)^2 + v_\phi(t)^2}$$

Vector aceleración instantánea

$$\vec{a}(t) = \dots = a_\rho(t)\vec{e}_\rho(t) + a_\theta(t)\vec{e}_\theta(t) + a_\phi(t)\vec{e}_\phi(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\rho(t) = \dots \\ a_\theta(t) = \dots \\ a_\phi(t) = \dots \end{array} \right.$$

$$a(t) = \sqrt{a_\rho(t)^2 + a_\theta(t)^2 + a_\phi(t)^2}$$

Las coordenadas esféricas son útiles para algunas trayectorias:

- En la superficie de una esfera: $\rho(t) = \rho(0)$
- En un plano vertical que contiene al eje Z: (meridionales o radiales, p.ej.) $\theta(t) = \theta(0)$
- Trayectorias en un plano horizontal (paralelas, p.ej.): $\phi(t) = \phi(0)$

Relación con las coordenadas rectangulares:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t) \\ y(t) = \rho(t) \operatorname{sen} \theta(t) \operatorname{sen} \phi(t) \\ z(t) = \rho(t) \cos \phi(t) \end{array} \right. \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} \rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \\ \theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} \\ \phi(t) = \arccos \frac{z(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \end{array} \right.$$



1.6. Media temporal de algunos conceptos

Vector *posición media*

$$\langle \vec{r} \rangle(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} \quad (\text{Posición media en } [t_1, t_2])$$

Vector *velocidad media*

$$\langle \vec{v} \rangle(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Velocidad media en } [t_1, t_2])$$

$$\langle \vec{v} \rangle(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} \quad (\text{Velocidad media en } [t_1, t_2])$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle(t, t + \Delta t) \quad (\text{Velocidad instantánea en } t)$$

Vector *aceleración media*

$$\langle \vec{a} \rangle(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (\text{Aceleración media en } [t_1, t_2])$$

$$\langle \vec{a} \rangle(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} \quad (\text{Aceleración media en } [t_1, t_2])$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle(t, t + \Delta t) \quad (\text{Aceleración instantánea en } t)$$



1.7. Algunos movimientos

1.7.1. Movimiento rectilíneo: en una dirección (por ejemplo, la del primer eje), $\vec{a}(t) = a_x(t) \vec{e}_x$, $\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{e}_x$ y $\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x$ (coordenadas rectangulares). Para calcular la velocidad y la aceleración a partir de la posición, basta con derivar; los cálculos inversos son

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} \rightarrow dv_x(t) = a_x(t) dt \rightarrow \int_{v_x(0)}^{v_x(t)} dv_x(t) = \int_0^t a_x(t) dt \rightarrow$$

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t) dt$$

y

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow dx(t) = v_x(t) dt \rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} dx(t) = \int_0^t v_x(t) dt \rightarrow$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt$$

1.7.2. Movimiento rectilíneo uniforme: en una dirección (por ejemplo, la del primer eje) y con velocidad constante, $\vec{a}(t) = 0\vec{e}_x$, $\vec{v}(t) = v_x(0)\vec{e}_x$ y $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x$ (coordenadas rectangulares). Para este caso particular,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(0) dt \rightarrow x(t) = x(0) + v_x(0)t$$

1.7.3. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: en una dirección y con aceleración constante $\vec{a}(t) = a_x(0)\vec{e}_x$, $\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x$ y $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x$ (coordenadas rectangulares).

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(0) dt \rightarrow v_x(t) = v_x(0) + a_x(0)t$$

y

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (v_x(0) + a_x(0)t) dt \rightarrow x(t) = x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2}a_x(0)t^2$$

1.7.4. Movimiento circular: Por motivos geométricos es muy útil utilizar el ángulo $\theta(t)$, entre el vector posición y el semieje horizontal positivo (del plano del movimiento). Una vez definido este ángulo, se puede estudiar el movimiento de varias formas:

En función de los **conceptos angulares**: Se definen

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (\text{Velocidad angular instantánea en } t)$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (\text{Aceleración angular instantánea en } t)$$

Estas cantidades suelen considerarse vectoriales, contenidas en el eje que es perpendicular a la circunferencia y pasa por su centro. A partir de estos conceptos se obtienen fórmulas análogas a las de los movimientos unidimensionales anteriores pero con $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $\alpha(t)$ en lugar de $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$. Para obtener la velocidad y la aceleración angulares a partir del ángulo, basta con derivar; los cálculos inversos son

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \rightarrow d\omega(t) = \alpha(t) dt \rightarrow \int_{\omega(0)}^{\omega(t)} d\omega(t) = \int_0^t \alpha(t) dt \rightarrow$$

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \alpha(t) dt$$

y

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow d\theta(t) = \omega(t) dt \rightarrow \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} d\theta(t) = \int_0^t \omega(t) dt \rightarrow$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(t) dt$$

En función de los **coordenadas rectangulares** (en el plano), expresadas en función de $\theta(t)$,

El vector posición es

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \quad (\text{Posición instantánea en } t)$$

con

$$\begin{cases} x(t) = d(0) \cos \theta(t) \\ y(t) = d(0) \operatorname{sen} \theta(t) \end{cases}$$

donde se ha definido

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = d(0)$$

Para obtener la velocidad

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \vec{e}_x + v_y(t) \vec{e}_y \quad (\text{Velocidad instantánea en } t)$$

$$\begin{cases} v_x(t) = -d(0) \operatorname{sen} \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \\ v_y(t) = d(0) \cos \theta(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \end{cases}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = \dots = |d(0) \frac{d\theta(t)}{dt}|$$

Para la aceleración

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \vec{e}_x + a_y(t) \vec{e}_y \quad (\text{Aceleración instantánea en } t)$$

$$\begin{cases} a_x(t) = -d(0) \left[\cos \theta(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 + \operatorname{sen} \theta(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right] \\ a_y(t) = -d(0) \left[\operatorname{sen} \theta(t) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 - \cos \theta(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right] \end{cases}$$

$$a(t) = |\vec{a}(t)| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2} = \dots = d(0) \sqrt{\left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^4 + \left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right)^2}$$

Propiedades:

- Se cumple que $\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0 \rightarrow \vec{v}(t)$ es perpendicular a $\vec{r}(t)$
- Se puede definir $\vec{\omega}(t)$ para que se cumpla que

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t).$$

Entonces, para los módulos, $v(t) = \omega(t) d(0)$.

- Si se consideran las cantidades lineales unidimensionales que se medirían desde la partícula para la *longitud de arco*, *celeridad* y *aceleración tangencial*, esto es, $s(t)$, $v(t)$ y $a_0(t)$, se tendrían las relaciones

$$s(t) = \theta(t) d(0), \quad v(t) = \omega(t) d(0) \quad \text{y} \quad a_0(t) = \alpha(t) d(0),$$

que son importantes, por ejemplo, en problemas de rodadura sin deslizamiento, cuando se fije la atención en una partícula de un cilindro, un tubo o una esfera

- Se cumple que

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)] = \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t) \\ &= \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t) \end{aligned}$$

- En las expresiones de esta sección se podrían escribir, si se desea, $d(0)$, $\theta(t)$ y $\omega(t)$ en función de $x(t)$ y $y(t)$.

En **coordenadas polares**, es decir, en función de un sistema de referencia dependiente del tiempo.

La posición se escribe de forma trivial en este sistema:

$$\vec{r}(t) = d(0) \vec{e}_d(t)$$

Nota: Nótese que el ángulo queda determinado por el vector.

Derivando en esta expresión se obtiene el vector velocidad (instantánea):

$$\vec{v}(t) = d(0) \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{e}_\theta(t)$$

Y derivando una vez más, la aceleración (instantánea):

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= d(0) \left[\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \vec{e}_\theta(t) + \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta(t)}{dt} \right] \\ &= -d(0) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \vec{e}_d(t) + d(0) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \vec{e}_\theta(t) \end{aligned}$$

por lo que

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_d(t) + \vec{a}_\theta(t) = a_d \vec{e}_d(t) + a_\theta \vec{e}_\theta(t),$$

donde las *componentes intrínsecas* de la aceleración instantánea son

$$\begin{cases} a_d(t) = -d(0) \left(\frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 = -d(0) \omega^2(t) \\ a_\theta(t) = d(0) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = d(0) \frac{d\omega(t)}{dt} \end{cases}$$

o, en función de los conceptos lineales,

$$\begin{cases} a_d(t) = -\frac{v^2(t)}{d(0)} \\ a_\theta(t) = \frac{dv(t)}{dt} \end{cases}$$

Nota: En algunos textos el vector unitario radial tiene el sentido opuesto, por lo que se obtiene la misma expresión de la aceleración normal pero con signo opuesto.

Nota: Es importante no confundir las fórmulas $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ y $a_\theta(t) = \frac{dv(t)}{dt}$

1.7.5. Movimiento circular uniforme: tiene celeridad constante, esto es, $\vec{\alpha}(t) = 0 \vec{e}_z$, $\vec{\omega}(t) = \omega(0) \vec{e}_z$, y $\vec{\theta}(t) = \theta(t) \vec{e}_z$.

En función de los conceptos angulares: Se tendría que

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega(0) dt \rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t$$

En coordenadas polares: Basta volver a las ecuaciones del movimiento circular general y sustituir los valores particulares de $\alpha(t) = 0$, $\omega(t) = \omega(0)$, y $\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t$. Por ejemplo, para las componentes de la aceleración se obtiene

$$\begin{cases} a_d(t) = -d(0) \omega^2(0) \\ a_\theta(t) = 0 \end{cases}$$

Propiedades:

- Se cumple que

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)],$$

por lo que la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia, o, lo que es lo mismo, toda la aceleración es radial/normal.

- En las expresiones anteriores se podrían escribir, si se desea, $d(0)$, $\theta(t)$ y $\omega(t)$ en función de $x(t)$ y $y(t)$.
- Éste es un *movimiento periódico* y se pueden definir

$$T = \frac{2\pi}{\omega(0)} \quad (\text{Periodo})$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega(0)}{2\pi} \quad (\text{Frecuencia})$$

1.7.6. Movimiento circular uniformemente acelerado: tiene aceleración constante, esto es, $\vec{\alpha}(t) = \alpha(0)\vec{e}_z$, $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}_z$, y $\vec{\theta}(t) = \theta(t)\vec{e}_z$.

En función de los conceptos angulares: Se tendría que

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \alpha(0) dt \rightarrow \omega(t) = \omega(0) + \alpha(0)t$$

y

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t (\omega(0) + \alpha(0)t) dt \rightarrow \theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha(0)t^2$$

En coordenadas polares: Basta volver a las ecuaciones del movimiento circular general y sustituir $\alpha(t)$, $\omega(t) = \omega(0) + \alpha(0)t$ y $\theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t + \frac{1}{2}\alpha(0)t^2$. Por ejemplo, para las componentes de la aceleración se obtiene

$$\begin{cases} a_r(t) = -d(0)(\omega(0) + \alpha(0)t)^2 \\ a_\theta(t) = d(0)\alpha(0) \end{cases}$$

Propiedades:

- Este movimiento tiene tanto aceleración normal como tangencial
- El movimiento circular uniforme es un caso particular de este donde $\alpha(0) = 0$
- En las expresiones anteriores se podrían escribir, si se desea, $d(0)$, $\theta(t)$ y $\omega(t)$ en función de $x(t)$ y $y(t)$.

1.7.7. Movimiento armónico simple: Un movimiento unidimensional (supóngase en el eje X) es armónico simple si está dado por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x$, con

$$x(t) = A \cos(bt + c),$$

donde la *amplitud* A queda determinada por la posición más alejada posible, b por el valor inicial de la velocidad y c por la posición en el instante inicial. Pueden escribirse

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x = A \cos(bt + c)\vec{e}_x$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -A \operatorname{sen}(bt + c)b\vec{e}_x$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -A \cos(bt+c) b^2 \vec{e}_x$$

Por ser un *movimiento periódico*, se pueden definir el *periodo* (tiempo en que la posición y la velocidad vuelvan a tomar, simultáneamente, el mismo valor)

$$\begin{cases} x(t) = x(t+T) \\ v(t) = v(t+T) \end{cases} \rightarrow bT = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{b},$$

y la *frecuencia*, el inverso del periodo,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{b}{2\pi}.$$

Por otro lado, es fácil ver que se cumple la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b^2x = 0.$$

Este tipo de movimiento aparece frecuentemente, por ejemplo:

- Dado un movimiento circular uniforme, la proyección en el eje X (imagínese la sombra de una partícula que se mueve por la circunferencia) es un movimiento armónico simple.
- Dado un movimiento circular uniforme, la proyección en el eje Y (imagínese la sombra de una partícula que se mueve por la circunferencia) es un movimiento armónico simple.
- Dada una partícula sometida a una fuerza restauradora, su posición describe un movimiento armónico simple (este tipo de fuerza se define más adelante en este documento).
- Dado un péndulo simple, el ángulo con respecto a la vertical sigue, para posiciones no muy alejadas de la posición de equilibrio, una expresión como la del movimiento armónico simple.
- En un circuito eléctrico oscilante, la expresión de la intensidad sigue una curva de este tipo (aunque, en este ejemplo, no hay ninguna partícula y, por tanto, tampoco movimiento). En este tipo de circuito, la cantidad de carga eléctrica también viene dada por una expresión de este tipo.
- En todo problema en que aparezca una ecuación diferencial como la dada arriba.

Nota: Por la relación entre el seno y el coseno, $\cos(\alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha)$, de forma equivalente se puede definir este movimiento a partir de $x(t) = A \text{sen}(bt+c)$.

1.7.8. Movimiento ondulatorio: Un movimiento bidimensional (en el plano XY) es ondulatorio si está dado por $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$, con

$$y(x, t) = A \cos(bt - cx),$$

donde la *amplitud* A queda determinada por la posición más alejada posible, b por el valor inicial de la velocidad y c por la posición en el instante inicial. Para cada instante de tiempo, la expresión anterior corresponde a una función trigonométrica; esta función se va «moviendo o desplazando» según cambia t .

Nótese que:

- Una partícula para la que $x(t) = t$, por ejemplo, recorre la curva trigonométrica. Pueden escribirse

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{e}_x + A \cos(bt - ct)\vec{e}_y \\ \vec{v}(t) &= 1\vec{e}_x - (b - c)A \text{sen}(bt - ct)\vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = 0\vec{e}_x - (b-c)^2 A \cos(bt-cx)\vec{e}_y.$$

- Una partícula para la que $x=x(0)=cte$ se mueve en vertical con un movimiento armónico simple. Pueden escribirse

$$\vec{r}(t) = x(0)\vec{e}_x + A \cos(bt-cx(0))\vec{e}_y$$

$$\vec{v}(t) = 0\vec{e}_x - b A \sin(bt-cx(0))\vec{e}_y$$

$$\vec{a}(t) = 0\vec{e}_x - b^2 A \cos(bt-cx(0))\vec{e}_y.$$

- Un conjunto de partículas puede formar, por ejemplo, una cuerda caracterizada por

$$\vec{r}(x,t) = x\vec{e}_x + A \cos(bt-cx)\vec{e}_y.$$

Se pueden definir los conceptos de *periodo* (temporal)

$$\begin{cases} y(x,t) = y(x,t+T) \\ v(x,t) = v(x,t+T) \end{cases} \rightarrow bT = 2\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{b},$$

y de *longitud de onda* (o periodo espacial)

$$\begin{cases} y(x,t) = y(x+\lambda,t) \\ v(x,t) = v(x+\lambda,t) \end{cases} \rightarrow c\lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{c}.$$

Como la onda avanza una longitud λ en un tiempo T , conviene definir la *velocidad de fase*,

$$v_f = \frac{\lambda}{T}.$$

Por último, es fácil ver que se cumple la *ecuación de onda* diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 y = 0.$$



1.8. Transformación de Galileo

Sean dos sistemas de referencia, S y \tilde{S} , tales que el segundo se mueve con respecto al primero en la dirección del primer eje y a velocidad constante V . Las ecuaciones que relacionan las cantidades que medirían observadores de ambos sistemas son las siguientes. Para la posición:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - Vt \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z \\ \tilde{t} = t \end{cases}$$

Derivando (nótese que $d\tilde{t} = dt$) se obtienen, para la velocidad:

$$\begin{cases} \tilde{v}_x = v_x - V \\ \tilde{v}_y = v_y \\ \tilde{v}_z = v_z \end{cases}$$

Por último, para la aceleración:

$$\begin{cases} \tilde{a}_x = a_x \\ \tilde{a}_y = a_y \\ \tilde{a}_z = a_z \end{cases}$$



1.9. Sistemas inerciales

De los anteriores cálculos se deduce que en ambos sistemas se mide la misma aceleración, y, como consecuencia, se medirán (si la masa es constante) las mismas fuerzas dinámicas. Aquí radica la importancia de los *sistemas inerciales*, que se definen como sistemas cuyo movimiento relativo es una traslación uniforme. Como en la práctica todos los cuerpos del Universo están en movimiento relativo acelerado (por ejemplo, por el hecho de que los planetas no son planos, giran y se trasladan), el observador no podría en rigor considerarlos como referencia, y en la práctica se considera que dos sistemas son inerciales si se verifica el principio de inercia con suficiente precisión según los aparatos de medida disponibles.



1.10. Mecánica Relativista

1.10.1. Transformación de Lorentz

En Mecánica Relativista (no clásica), se consideran las relaciones que generalizan la transformación de Galileo para altas velocidades. Sean dos sistemas de referencia inerciales, S y S' , tales que el segundo se mueve con respecto al primero en la dirección del primer eje y a velocidad constante V . Sea el factor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

donde c es la velocidad de la luz. (Nótese que $\gamma > 1$) Las ecuaciones que relacionan las cantidades que medirían observadores de ambos sistemas son las siguientes. Para la posición:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \gamma(x - Vt) \\ \tilde{y} = y \\ \tilde{z} = z \\ \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{cases}$$

Derivando (nótese que ahora $d\tilde{t} \neq dt$ y, por ejemplo, $\tilde{v}_x = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$ y $v_x = \frac{dx}{dt}$, lo que hace que los cálculos analíticos sean mucho más difíciles) se obtienen, para la velocidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ \tilde{v}_y = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \\ \tilde{v}_z = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \end{array} \right.$$

y para la aceleración:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_x = \frac{1}{\gamma^3} \frac{a_x}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^3} \\ \tilde{a}_y = \frac{1}{\gamma^2} \frac{a_y + \frac{V}{c^2} (a_x v_y - a_y v_x)}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^3} \\ \tilde{a}_z = \frac{1}{\gamma^2} \frac{a_z + \frac{V}{c^2} (a_x v_z - a_z v_x)}{\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)^3} \end{array} \right.$$

Una de las consecuencias de la transformación de Lorentz es la *contracción de longitudes*: Supongamos dos observadores situados en los dos sistemas inerciales, cada uno con una varilla de longitud $L = x_2 - x_1$ en el sistema propio (en el que está), desde el sistema en movimiento respecto al nuestro se vería con longitud

$$\tilde{L} = \frac{L}{\gamma}$$

Nótese que ¡a los dos observadores les parece que su varilla es más larga que la del otro! La otra famosa consecuencia es la *dilatación del tiempo*: Dado un intervalo de tiempo $\tau = t_2 - t_1$ en el sistema propio, desde el sistema en movimiento se mediría como

$$\tilde{\tau} = \tau \gamma$$

De nuevo, lo mismo le sucedería a un observador del otro sistema de referencia.

Es importante tener en cuenta que en Mecánica Relativista, todos los conceptos en que aparezcan longitudes y tiempos, deben ser calculados de nuevo, porque en general los observadores medirían cantidades distintas: por ejemplo, para un promedio temporal, para una fuerza que depende de la distancia, etcétera. (En el caso de alguna cantidad, podría suceder que estas dilataciones y contracciones se cancelasen y la cantidad fuese igual a la clásica.)

Por último, es interesante señalar que la transformación de Galileo de la Mecánica Clásica es un caso extremo de esta transformación de Lorentz de la Mecánica Relativista:

$$V \ll c \rightarrow \frac{V}{c} \approx 0 \rightarrow \gamma \approx 1$$



2. Cinemática de un sistema de partículas

2.1. Introducción

Se puede definir un *sistema* como una parte de materia aislada mentalmente del resto; el resto son los *alrededores*. Una forma de estudiar el movimiento de un sistema de partículas consiste en estudiar el de cada partícula, así como las reglas de interacción entre las partículas. En general, a mano solo es cómodo tener en cuenta dos, tres o cuatro partículas. Únicamente se considerarán más partículas para el caso específico –más sencillo– de los sólidos rígidos.

Incluso con la ayuda de un ordenador, en la práctica no es posible estudiar muchas partículas a la vez (en comparación con el número de Avogadro, por ejemplo), por lo que otras formas de estudiar un sistema consisten en adquirir un punto de vista «macroscópico». Se pueden considerar los valores medios de las cantidades observables (presión, volumen, temperatura, etc.): esta aproximación es la que sigue la Termodinámica, la Mecánica Estadística o la Teoría Cinética de Gases, que estudian magnitudes estadísticas o macroscópicas.

En esta sección se considerará otra forma «macroscópica» de estudiar un sistema de partículas, que va a consistir en definir una pseudopartícula –el *centro de masas*– que, con una masa equivalente a la de todo el sistema, describa el comportamiento general o medio con un nivel de detalle suficiente para algunos casos, o sirva como nuevo sistema de referencia para describir todas las partículas del sistema (si son pocas). La cinemática (y la dinámica) del centro de masas no depende de la interacción interna de las partículas del sistema.



2.2. Centro de masas

Para un sistema de n partículas se define el *centro de masas* como un punto que representa a todo el sistema de partículas, y para ello la *masa del centro de masas* es la suma de las masas de las partículas del sistema, $M = \sum_{i=1}^n m_i$, y una *posición del centro de masas* dada por

$$\vec{R}(t) = M^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i(t) m_i$$

Para el caso de una distribución continua de masa, este punto lo determinaría la integral

$$\vec{R}(t) = \left(\int_V dm \right)^{-1} \int_V \vec{r} dm$$

La *velocidad del centro de masas* es

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt},$$

y la *aceleración del centro de masas*

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}.$$

Toda la cinemática de una partícula puede aplicársele al centro de masas. Podría escribirse, en coordenadas rectangulares, por ejemplo,

$$\vec{R}(t) = X(t)\vec{e}_x + Y(t)\vec{e}_y + Z(t)\vec{e}_z$$

$$\text{con } X(t) = M^{-1} \sum_{i=1}^n m_i x_i(t), \quad \dots$$

A veces es útil situar el origen de coordenadas en el centro de masas. El sistema original y el situado en el centro de masas son sistemas inerciales entre sí. Para cada partícula de masa m_i , que se mueve con velocidad \vec{v}_i , la velocidad medida desde el centro de masas, \vec{v}_i^{cm} , está dada por:

$$\vec{v}_i(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}_i^{cm}(t) \quad \rightarrow \quad \vec{v}_i^{cm}(t) = \vec{v}_i(t) - \vec{V}(t)$$



2.3. Sólido rígido (parte 1 de 3)

Un sólido rígido es un sistema de partículas en que las posiciones relativas entre las partículas no varían y que no se deforma cuando se le aplican fuerzas (podríamos decir, «o se conoce el modo sencillo en que estas posiciones varían»). Según el *teorema de Euler*, el movimiento general de un sólido puede representarse por una traslación de su centro de masas más una rotación en torno a cierto eje. El movimiento de traslación puede estudiarse a través de su centro de masas. En el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, es útil considerar el ángulo $\theta(t)$ y, sin pérdida de generalidad, suponer que el eje es paralelo al eje Z. Todas las partículas contenidas en un mismo plano radial tienen el mismo valor de $\theta(t)$; por otra parte, todas las partículas del sólido tienen la misma aceleración y velocidad angulares

$$\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{e}_z = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_z \quad \vec{\alpha}(t) = \alpha(t)\vec{e}_z = \frac{d\omega(t)}{dt}\vec{e}_z$$

Para una partícula del sólido que esté situada a una distancia $\vec{r}_i(t) = d_i(0)\vec{e}_d$ medida en perpendicular al eje de giro (es decir, sin tener en cuenta la coordenada $z(t)$ cilíndrica), su velocidad y aceleración lineales son

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad \text{y} \quad \vec{a}_{0,i}(t) = \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}(t)$$

o, para los módulos,

$$v_i(t) = \omega(t)d_i(0) \quad \text{y} \quad a_{0,i}(t) = \alpha(t)d_i(0)$$

Para el giro, las cantidades angulares $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $\alpha(t)$ verifican las relaciones que se vieron para el movimiento circular de una partícula.



3. Dinámica de una partícula

3.1. Introducción

Estudia el movimiento en relación con sus causas. Las causas son interacciones que se representan por la cantidad vectorial llamada *fuerza*. Aunque hay más tipos de fuerzas, las *fundamentales* de la Naturaleza son las asociadas a interacciones *gravitatorias*, *electromagnéticas* (las *eléctricas* y *magnéticas* son un caso particular) y las *nucleares fuerte y débil*.

De nuevo se hace la simplificación de suponer que una partícula tiene volumen nulo y ocupa solo un punto.



3.2. Momento lineal o cantidad de movimiento

El *estado dinámico* de una partícula queda definido por la variable *momento lineal* o *cantidad de movimiento* instantáneo, que combina la información de la velocidad y la de la masa:

$$\vec{p}(t) = m \vec{v}(t),$$

donde m es la *masa inercial* de la partícula, que en Mecánica Clásica no cambia con el tiempo.



3.3. Leyes de Newton

Primera: «Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se le obligue a cambiar mediante alguna fuerza». A esta ley también se la conoce como *principio de inercia* o *ley de inercia*.

Segunda: La fuerza y el momento lineal se relacionan mediante

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}(t)}{dt}$$

A esta ley también se la conoce como *ley fundamental de la dinámica*.

Consecuencias

- Se cumple que

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}(t) dt \rightarrow \int_{\vec{p}(0)}^{\vec{p}(t)} d\vec{p}(t) = \int_0^t \vec{F}(t) dt \rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}(0) + \int_0^t \vec{F}(t) dt$$

y, cuando la fuerza no depende del tiempo,

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0) + t \vec{F}$$

- **3.3.1. Principio de conservación del momento lineal**

$$\text{Si } \vec{F}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}(0)$$

- Por otro lado, cuando la masa es constante, se puede hacer

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m \vec{v}(t) = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \vec{a}(t)$$

Es interesante ver que, si la fuerza es nula, lo es la aceleración, y se conserva el estado de movimiento de la partícula (primera ley)

- En los movimientos circulares, de gran importancia, se cumple que $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_\rho$ con

$$\vec{F}_0 = m \vec{a}_0(t) = m \frac{dv(t)}{dt} \vec{e}_0 \quad \text{y} \quad \vec{F}_\rho = m \vec{a}_\rho(t) = -m \frac{v(t)^2}{\rho(0)} \vec{e}_\rho$$

Tercera: «Si una partícula A ejerce una fuerza sobre B, la partícula B ejerce sobre A otra fuerza igual en módulo y dirección, pero de sentido contrario». A esta ley también se la conoce como *ley de acción y reacción*.



3.4. Impulso mecánico

Este concepto se define para evaluar la variación del momento lineal

$$d\vec{I}_m = \vec{F} dt, \text{ o, en rigor, } d\vec{I}_m(t) = \vec{F}(t) dt,$$

De esta fórmula se deducen

- $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$ y, para una fuerza constante, $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \vec{F}(0) \Delta t$
- $d\vec{I}_m = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} dt = d\vec{p}(t)$ y, para un intervalo no infinitesimal, se llega el *teorema del impulso mecánico* $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \Delta \vec{p}(t)$
- Por último, para una fuerza constante y un intervalo, $\vec{F}(0) \Delta t = \Delta \vec{p}(t)$



3.5. Fuerzas de inercia o ficticias

Cuando dos sistemas de referencia son no inerciales, las aceleraciones que se miden en uno y otro difieren. Sean los sistemas S_1 y S_2 , sus aceleraciones se relacionan mediante

$$a_2(t) = a_1(t) + a(t)$$

Como «causa ficticia» de la aceleración $a(t)$, y para poder aplicar matemáticamente la segunda ley de Newton, a veces se introduce una *fuerza de inercia* o *ficticia*, que no está asociada a ningún fenómeno fundamental de la Naturaleza, sino que son un método para trabajar con algunos sistemas no inerciales (movimientos circulares, un ascensor cayendo en el vacío, etcétera).



3.6. Momento angular

Se define como

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t).$$

Por otro lado, el momento de una fuerza $\vec{F}(t)$ se define como

$$\vec{M}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t),$$

y el *teorema del momento angular*

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{v}(t) \times m \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = \vec{0} + \vec{M}(t)$$

garantiza que

$$\vec{M}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

Consecuencias

- Se cumple que

$$d\vec{L}(t) = \vec{M}(t)dt \rightarrow \int_{\vec{L}(0)}^{\vec{L}(t)} d\vec{L}(t) = \int_0^t \vec{M}(t)dt \rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(0) + \int_0^t \vec{M}(t)dt$$

y, si el momento no depende del tiempo,

$$\vec{L}(t) = \vec{L}(0) + t\vec{M}$$

- 3.6.1. **Principio de conservación del momento angular**

$$\vec{M}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(0)$$

- Es interesante considerar el caso de las *fuerzas centrales*, las dirigidas en la dirección radial. Considerando coordenadas esféricas,

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(\rho)\vec{e}_\rho \rightarrow \vec{M}(t) = \vec{r} \times \vec{F} = \rho\vec{e}_\rho \times F(\rho)\vec{e}_\rho = 0$$

Por este motivo, las fuerzas centrales implican la conservación del momento angular.

- Se cumple que, considerando coordenadas esféricas,

$$\vec{L}(t) = \rho(t)m\omega(t)\rho(t)\vec{e}_z = \omega(t)\rho(t)^2m\vec{e}_z = \omega(t)I(t)\vec{e}_z,$$

donde el *momento de inercia* de la partícula, con respecto al sistema de referencia en que se hayan medido las cantidades implicadas, se define como

$$I(t) = \rho(t)^2m.$$



3.7. Impulso angular

Este concepto se define para evaluar la variación del momento angular

$$d\vec{I}_a = \vec{M} dt, \quad \text{o, en rigor} \quad d\vec{I}_a(t) = \vec{M}(t)dt$$

De esta fórmula se deducen

- $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t)dt$ y, cuando $\vec{M}(t) = \vec{M}(0)$, se tiene $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \vec{M}(0)\Delta t$
- $d\vec{I}_a = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}dt = d\vec{L}(t)$ y, para intervalo no infinitesimal, $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \Delta\vec{L}(t)$
- Por último, cuando $\vec{M}(t) = \vec{M}(0)$ y para un intervalo, $\vec{M}(0)\Delta t = \Delta\vec{L}(t)$



3.8. Cuerdas, hilos o cables

En algunos casos, estos elementos aparecen entre dos masas, y tienen como función transmitir las fuerzas de un punto de aplicación a otro, en general cambiando la dirección. Si no se dice lo contrario, son inextensibles (no variarían las longitudes) y de masa despreciable (no variarían las aceleraciones). Solo pueden tirar, no empujar. Aparecen dos fuerzas, llamadas *tensiones*, iguales en módulo pero de sentido opuesto (al sumarlas, en la segunda ley de Newton, se cancelan).



3.9. Fuerzas restauradoras (parte 1 de 2)

La magnitud de este tipo de fuerzas unidireccionales (supongamos que en la del primer eje), muy frecuentes en Física (para modelizar muelles o atracciones moleculares), depende de la posición según la *ley de Hooke*:

$$\vec{F}(x) = -kx \vec{e}_x.$$

Nota: Si la posición en que se anula la fuerza es x_0 , la fuerza se escribiría como $\vec{F}(x) = -k(x - x_0) \vec{e}_x$.

Nota: Este tipo de fuerzas son centrales y, por tanto, conservativas (se definen más adelante en este documento).

En adelante, supóngase una partícula sometida a esta fuerza. La aceleración (en función de la posición) se escribe como

$$\begin{cases} \vec{F}(x) = -kx \vec{e}_x \\ \vec{F}(x) = m\vec{a} \end{cases} \rightarrow \vec{a} = -\frac{k}{m}x \vec{e}_x.$$

A partir de la definición de aceleración se obtiene la ecuación diferencial que verifica la posición de una partícula movida por esta fuerza

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene la posición en función del tiempo

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c\right),$$

donde la amplitud A queda determinada por la posición más alejada posible (nótese que la fuerza crece con la distancia, lo que induce a pensar que la partícula se alejaría una cantidad finita si su energía mecánica es finita. Por otro lado, esta posición queda determinada por una ligadura energética) y c por la posición en el instante inicial. Para ver cómo se deducen estos valores, véase el apartado de energía y trabajo para una partícula.

Nota: Una partícula cuya posición está dada por la expresión anterior, se está moviendo según un movimiento armónico simple.

Utilizando la expresión explícita de la posición, pueden escribirse

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c\right) \vec{e}_x$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c\right) \sqrt{\frac{k}{m}} \vec{e}_x$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c\right) \frac{k}{m} \vec{e}_x$$

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = -A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + c\right) k \vec{e}_x$$



3.10. Mecánica Relativista

Masa dependiente de la velocidad, para una partícula a velocidad de módulo v

Si no se puede superar la velocidad de la luz, la masa no puede ser constante, puesto que para una fuerza constante aplicada un tiempo suficiente, la expresión $\vec{F} = m\vec{a}$ implicaría que la aceleración aumentaría la velocidad indefinidamente. En Mecánica Relativista, se considera que la masa depende de la velocidad. Recordando el factor corrector

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

donde c es la velocidad de la luz, la masa se escribe como

$$m(v) = m(0)\gamma(v).$$

Ahora, el momento lineal de la partícula es

$$\vec{p}(v) = m(v)\vec{v} \quad \text{ó} \quad \vec{p}(v(t)) = m(0)\gamma(v(t))\vec{v}(t)$$

La ecuación del movimiento está dada por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}(v(t)) = m(0)\frac{d}{dt}(\gamma(v(t))\vec{v}(t)).$$

Esta ecuación no permanece invariante bajo la transformación de Galileo; en Mecánica Relativista, esta ecuación y las demás leyes dinámicas conservan su forma bajo la transformación de Lorentz.

Por último, es interesante señalar que para bajas velocidades (por ejemplo, las de los cuerpos muy masivos) la Mecánica Clásica es un caso extremo de la Mecánica Relativista, porque:

$$v(t) \ll c \rightarrow \frac{v(t)}{c} \approx 0 \rightarrow \gamma(v(t)) \approx 1$$



4. Dinámica de un sistema de partículas

4.1. Introducción

La dinámica de un sistema de partículas puede afrontarse de las mismas formas que la cinemática. En el caso de un sistema, es fundamental distinguir *fuerzas interiores*, entre las partículas del sistema, y las *fuerzas exteriores*, entre las partículas y agentes externos al sistema.



4.2. Momento lineal o cantidad de movimiento

El *estado dinámico* de un sistema de partículas queda definido por la variable *momento lineal* o *cantidad de movimiento* instantáneo. Se define, generalizando el caso de una sola partícula, como

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i(t),$$

y es fácil comprobar que

$$\vec{P}(t) = M \vec{V}(t),$$

donde M es la *masa inercial* del centro de masas, y $\vec{V}(t)$ es la velocidad del centro de masas (nótese que puede ser nula y, sin embargo, que las partículas del sistema se muevan).



4.3. Leyes de Newton

Primera: El centro de masas de un sistema de partículas conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se le obligue a cambiar mediante alguna fuerza externa neta no nula.

Segunda: Las fuerzas internas no modifican el movimiento del centro de masas, por lo que para un sistema de partículas:

$$\vec{F}_{ext}(t) = \frac{d\vec{P}(t)}{dt},$$

donde $\vec{F}_{ext}(t)$ es la fuerza resultante de sumar todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Esta ecuación se conoce como *ecuación fundamental de la dinámica de un sistema de partículas*.

Consecuencias

- Se cumple que

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(0) + \int_0^t \vec{F}_{ext}(t) dt$$

y, cuando la fuerza no depende del tiempo,

$$\vec{P}(t) = \vec{P}(0) + t \vec{F}_{ext}$$

- **4.3.1. Principio de conservación del momento lineal**

$$\vec{F}_{ext}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{P}(t) = \vec{P}(0)$$

- Por otro lado, cuando la masa es constante, se puede hacer

$$\vec{F}_{ext} = M \vec{A}(t),$$

donde $\vec{A}(t)$ es la aceleración del centro de masas.

- Para un sistema aislado, es decir, tal que $\vec{F}_{ext}(t) = \vec{0}$, se tiene que

$$\vec{0} = \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i(t),$$

donde $\vec{f}_i(t)$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i -ésima.

Tercera: Si se considera a la partícula por un lado, y al resto del Universo (o sistema) por otro, se tiene un sistema aislado, por lo que (véase el último punto del apartado anterior)

$$\vec{0} = \vec{f}_p(t) + \vec{f}_s(t),$$

donde $\vec{f}_p(t)$ es la fuerza que actúa sobre la partícula, y $\vec{f}_s(t)$ la que actúa sobre el sistema.



4.4. Choques y explosiones

Para un sistema aislado, sabemos que se conserva el momento lineal cuando la fuerza externa total es nula. Este principio de conservación se utiliza para resolver los problemas de choques y explosiones, donde la suma de los momentos de las partículas iniciales tiene que ser igual al de las finales

$$\vec{P}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i(t) = \sum_{j=1}^m \vec{p}_j(0) = \vec{P}(0)$$

En estos problemas, suele ser necesario recurrir a otras ecuaciones, dependiendo de la información y las incógnitas.

- En los choques (perfectamente) elásticos, se conserva la energía mecánica (suele equivaler a que se conserve la energía cinética).

$$E_M(t) = E_M(0)$$

- En los choques (perfectamente) inelásticos, se cumple que todas las partículas quedan unidas, en el centro de masas, por lo que

$$\vec{v}_j(t) = \vec{V}(t),$$

donde la velocidad del centro de masas se calcula como $\vec{V}(t) = M^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i(t)$.



4.5. Masa dependiente del tiempo

Sea un sistema no aislado de masa $M(t) = M(0) - m(t)$, con velocidad $\vec{v}_M(t)$, que intercambia con el exterior la cantidad de masa $m(t)$, de velocidad constante \vec{v}_m ; sea una fuerza exterior $\vec{F}_{ext}(t)$ actuando sobre el sistema, y sea $\vec{P}(t) = \vec{P}_M(t) + \vec{P}_m(t)$ el momento lineal del sistema. La *ecuación del movimiento* está dada por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_{ext}(t) = \frac{d}{dt} \vec{P}(t) = \frac{d}{dt} \vec{P}_M(t) + \frac{d}{dt} \vec{P}_m(t).$$

Como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{P}_M(t) = \frac{d}{dt} (M(t) \vec{v}_M(t)) = \frac{d}{dt} M(t) \cdot \vec{v}_M(t) + M(t) \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_M(t) \\ \frac{d}{dt} \vec{P}_m(t) = \frac{d}{dt} (m(t) \vec{v}_m) = \vec{v}_m \frac{d}{dt} m(t) \end{cases}$$

y

$$\frac{d}{dt} M(t) = - \frac{d}{dt} m(t),$$

la ecuación se convierte en

$$\vec{F}_{ext}(t) + \frac{dM(t)}{dt}(\vec{v}_m - \vec{v}_M(t)) = M(t)\vec{a}_M(t)$$

Por tanto, la fuerza instantánea que acelera la masa $M(t)$, en presencia de otras posibles fuerzas recogidas en $\vec{F}_{ext}(t)$, es

$$\frac{dM(t)}{dt}(\vec{v}_m - \vec{v}_M(t))$$

En el caso de la propulsión a chorro (un cohete o un calamar, por ejemplo), a esta fuerza se la llama *fuerza de reacción*. Si el sistema está bajo los efectos de un campo gravitatorio, por ejemplo, entonces $\vec{F}_{ext}(t) = \vec{F}_g$; pero si el sistema es libre (en el espacio exterior, por ejemplo), entonces $\vec{F}_{ext}(t) = \vec{0}$.



4.6. Impulso mecánico de un sistema

Evalúa la variación del momento lineal del sistema

$$d\vec{I}_m = \vec{F}_{ext} dt, \text{ o, en rigor, } d\vec{I}_m(t) = \vec{F}_{ext}(t) dt.$$

De esta fórmula se deducen

- $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext}(t) dt$ y, para una fuerza constante, $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \vec{F}_{ext}(0) \Delta t$
- $d\vec{I}_m = \frac{d\vec{P}(t)}{dt} dt = d\vec{P}(t)$ y, para un intervalo no infinitesimal, $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \Delta \vec{P}(t)$
- Por último, para una fuerza constante y un intervalo, $\vec{F}_{ext}(0) \Delta t = \Delta \vec{P}(t)$



4.7. Momento angular de un sistema

Se define como

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i(t) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t).$$

Se puede demostrar que el momento debido a las fuerzas internas no varía el momento angular del sistema, por lo que, si se definen $\vec{M}_{ext,i}(t) = \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_{ext,i}(t)$ y $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{ext,i}(t) = \vec{M}_{ext}(t)$, también para un sistema se cumple el *teorema del momento angular para un sistema*

$$\vec{M}_{ext}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}$$

Consecuencias

- Se cumple que

$$d\vec{L}(t) = \vec{M}_{ext}(t) dt \rightarrow \int_{\vec{L}(0)}^{\vec{L}(t)} d\vec{L}(t) = \int_0^t \vec{M}_{ext}(t) dt \rightarrow$$

$$\vec{L}(t) = \vec{L}(0) + \int_0^t \vec{M}_{ext}(t) dt$$

y, si el momento no depende del tiempo,

$$\vec{L}(t) = \vec{L}(0) + t \vec{M}_{ext}$$

• 4.7.1. **Teorema de conservación del momento angular**

$$\vec{M}_{ext}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{L}(t) = \vec{L}(0)$$

- Es interesante considerar el caso en que una fuerza central es la única fuerza externa que actúa sobre el centro de masas. Considerando coordenadas esféricas,

$$\vec{F}_{ext}(\vec{r}) = F(\rho) \vec{e}_\rho \rightarrow \vec{M}_{ext}(t) = \vec{R} \times \vec{F}_{ext} = \rho \vec{e}_\rho \times F(\rho) \vec{e}_\rho = 0$$

Por este motivo, las fuerzas centrales implican la conservación del momento angular del centro de masas.

- Sistema de referencia en el centro de masas: Como $\vec{r}_i(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}_i^{cm}(t)$, donde $\vec{r}_i^{cm}(t)$ es el vector de posición de la partícula i -ésima respecto al centro de masas, se cumple el *primer teorema de König*

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_{cm}(t) + \vec{L}^{cm}(t) = \vec{R}(t) \times \vec{P}(t) + \vec{L}^{cm}(t),$$

donde $\vec{L}_{cm}(t)$ es el momento del centro de masas y $\vec{L}^{cm}(t)$ es el momento del sistema respecto al centro de masas. Por otro lado, considerando el centro de masas como un sistema de una partícula, se tiene que $\vec{L}_{cm}(t) = \omega(t) I_{cm} \vec{e}_z = \omega(t) M R(t)^2 \vec{e}_z$.



4.8. Impulso angular de un sistema

Evalúa la variación del momento angular del sistema

$$d \vec{I}_a = \vec{M}_{ext} dt, \text{ o, en rigor, } d \vec{I}_a(t) = \vec{M}_{ext}(t) dt,$$

De esta fórmula se deducen

- $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{ext}(t) dt$ y, si $\vec{M}_{ext}(t) = \vec{M}_{ext}(0)$, $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \vec{M}_{ext}(0) \Delta t$
- $d \vec{I}_a = \frac{d \vec{L}(t)}{dt} dt = d \vec{L}(t)$ y, para un intervalo no infinitesimal, $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \Delta \vec{L}(t)$
- Por último, cuando $\vec{M}_{ext}(t) = \vec{M}_{ext}(0)$, y para un intervalo, $\vec{M}_{ext}(0) \Delta t = \Delta \vec{L}(t)$



4.9. Presión

Para el caso de una partícula, las fuerzas se aplican en un punto. Cuando la zona de aplicación es una superficie de área no nula, A , la *presión* se define como la fuerza por unidad de área:

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{A}$$



4.10. **Sólido rígido** (parte 2 de 3)

Si para cada partícula del sólido $\vec{r}_i(t) = d_i(t) \vec{e}_d$ es la distancia medida en perpendicular al eje de giro (es decir, sin tener en cuenta la coordenada $z(t)$ cilíndrica), se cumple, para un sistema de partículas discreto, que

$$\vec{L}(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t) m_i \omega(t) d_i(t) \vec{e}_z = \omega(t) \sum_{i=1}^n d_i(t)^2 m_i \vec{e}_z = \omega(t) I(t) \vec{e}_z,$$

donde

$$I(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t)^2 m_i.$$

Ahora, para un sistema de partículas continuo

$$\vec{L}(t) = \int_S d_{dm}(t) \omega(t) d_{dm}(t) dm \vec{e}_z = \omega(t) \int_S d_{dm}(t)^2 dm \vec{e}_z = \omega(t) I(t) \vec{e}_z,$$

donde

$$I(t) = \int_S d_{dm}(t)^2 dm.$$

La cantidad I se denomina *momento de inercia* del sólido rígido, y es una propiedad física del sistema: su resistencia a ser girado. En la mayoría de los casos no depende del tiempo, porque las partículas no se mueven con respecto al eje; pero en algunos problemas sí interesará comparar su valor en dos instantes de tiempo distintos.

Para los dos casos, discreto y continuo, se cumple la *ecuación fundamental de la dinámica de rotación*, que es para los sólidos rígidos lo que la segunda ley de Newton para una partícula

$$\vec{M}_{ext}(t) = \alpha(t) I(t) \vec{e}_z$$

Nota: Se supone que la fuerza que hace girar al sólido está contenida en un plano perpendicular al eje de giro, en otro caso se descompone y se considera esa componente. Nótese que en la definición original, el producto vectorial hace esto.

4.10.1. Para un sólido rígido la conservación del momento angular toma la forma

$$\alpha(t) = 0 \rightarrow \omega(t) I(t) = \omega(0) I(0)$$

Una vez que se ha calculado el momento de inercia con respecto a un eje, se pueden aprovechar estos cálculos para calcularlo con respecto a otro. El *teorema de los ejes paralelos* o *de Steiner* dice que, si \vec{L}^{cm} es el momento para un eje que pasa por el centro de masas, para un eje paralelo a este eje se cumple que

$$\vec{L} = \vec{L}^{cm} + M d^2,$$

donde d es la distancia entre los ejes. Por otro lado, para figuras planas el *teorema de los ejes perpendiculares* afirma que si \vec{L}^{e_1} y \vec{L}^{e_2} son los momentos calculados respecto a dos ejes perpendiculares contenidos en el sólido, el momento con respecto a un eje perpendicular a ambos viene dado por

$$\vec{L}^{e_3} = \vec{L}^{e_1} + \vec{L}^{e_2}.$$

4.10.2. Impulsos mecánico y angular de un sólido rígido

La fuerza externa que actúa sobre el sólido rígido, $\vec{F}_{ext}(t)$, puede descomponerse en la fuerza que causa movimiento de traslación y la que causa movimiento de rotación:

$$\vec{F}_{ext}(t) = \vec{F}_{ext}^{tras}(t) + \vec{F}_{ext}^{rot}(t).$$

Para el movimiento de traslación, como $d \vec{I}_m(t) = \vec{F}_{ext}^{tras}(t) dt$ se tiene que:

$$\bullet \quad \vec{I}_m(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext}^{tras}(t) dt \quad \text{y, para una fuerza constante, } \vec{I}_m(t_1, t_2) = \vec{F}_{ext}^{tras}(0) \Delta t$$

- $d\vec{I}_m = \frac{d\vec{P}(t)}{dt} dt = d\vec{P}(t)$ y, para un intervalo, $\vec{I}_m(t_1, t_2) = \Delta\vec{P}(t)$
- Por último, para una fuerza constante y un intervalo, $\vec{F}_{ext}^{tras}(0)\Delta t = \Delta\vec{P}(t)$

Para el movimiento de rotación, como

$$d(t)F_{ext}^{tras}(t)\vec{e}_z = \vec{M}_{ext}(t) = \alpha(t)I(t)\vec{e}_z,$$

donde $I(t)$ es el momento de inercia del sólido rígido, y $d\vec{I}_a(t) = \vec{M}_{ext}(t)dt$, se deducen:

- $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{ext} dt$ y, para un momento constante, $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \vec{M}_{ext}(0)\Delta t$
- $d\vec{I}_a = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} dt = d\vec{L}(t)$ y, para un intervalo infinitesimal, $\vec{I}_a(t_1, t_2) = \Delta\vec{L}(t)$
- Por último, para un momento constante y un intervalo, se obtiene el *teorema del impulso angular* $\vec{M}_{ext}(0)\Delta t = \Delta\vec{L}(t)$

4.10.3. **Cuerpos rodantes (cilindros y esferas).** Para un cuerpo que rueda sin deslizamiento, es fundamental relacionar los conceptos angulares con los lineales de un punto de la periferia. Para la *longitud de arco*, *celeridad* y *aceleración lineal o tangencial*, esto es, $s(t)$, $v(t)$ y $a_\theta(t)$, se tendrían las relaciones

$$s(t) = \theta(t)d(0), \quad v(t) = \omega(t)d(0) \quad \text{y} \quad a_\theta(t) = \alpha(t)d(0),$$

donde $d(0)$ es el radio del sólido rígido. Respecto a la dinámica, si la fuerza total tangencial que hace girar al sólido tiene módulo F (con frecuencia suele ser la de rozamiento, porque el peso está aplicado sobre el eje), el módulo de su momento verifica las dos relaciones

$$\begin{cases} M_{ext}(t) = Fd(0) \\ M_{ext}(t) = \alpha(t)I(t) \end{cases}$$

Para el centro de masas, se verifica que la velocidad y la aceleración son, en módulo, iguales a las de un punto de la periferia (imagínese un punto de la periferia y las marcas que dejaría al rodar). Por tanto,

$$V(t) = \omega(t)d(0) \quad \text{y} \quad A(t) = \alpha(t)d(0).$$



5. Energía, trabajo y potencia para una partícula

5.1. Introducción

La *energía* es la capacidad de realizar *trabajo*, lo que equivale a transformar la materia. La *potencia* mide la capacidad (cantidad y rapidez) de hacer trabajo.

Hay muchos tipos de energía: la cinética está asociada a la velocidad, la potencial a la posición, la térmica al movimiento de las partículas y, por tanto, a la temperatura. Ahora se estudiarán las dos primeras formas. Cuando hay trabajo, hay transferencia de energía.

Los ejemplos de transformación de la materia que se van a estudiar ahora son los cambios de velocidad o de posición; en otras ramas de la Física se tienen en cuenta otras transformaciones.



5.2. Trabajo

El *trabajo* que realiza una fuerza constante \vec{F} aplicada en un punto lo largo de un desplazamiento rectilíneo s se define como

$$W = |\vec{F}| \cdot s, \quad \text{ó, haciendo explícitos los tiempos, } W(t_1, t_2) = |\vec{F}| \cdot s(t_1, t_2).$$

Para una fuerza variable y un desplazamiento infinitesimalmente pequeño, puede suponer que la fuerza es aproximadamente constante, por lo que el trabajo que realiza la fuerza es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{ó, haciendo explícitos los tiempos, } dW(t) = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}(t)$$

Nota: De esta expresión se puede deducir que solo realizará trabajo la componente de la fuerza que es tangencial a la trayectoria.

Ahora, una trayectoria curvilínea Γ puede descomponerse en infinitos fragmentos infinitamente pequeños, lo que llevaría a que el trabajo de una fuerza variable cuyo punto de aplicación recorre la trayectoria se calcula matemáticamente como la integral curvilínea

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{ó, haciendo explícitos los tiempos, } W(t_1, t_2) = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

Nota: En algunas situaciones, es necesario calcular el trabajo que se debe aplicar (nosotros, por ejemplo) para hacer una tarea, pero este trabajo solo puede calcularse cambiando de signo el que hace una determinada fuerza: cuando se debe hacer un trabajo en contra de la fuerza gravitatoria, por ejemplo.

Nota: Un trabajo de signo positivo consume energía (la añade), mientras que uno de signo negativo la disipa (la extrae).



5.3. Superposición: Para el trabajo debido a varias fuerzas se cumple que

$$W_{total} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{total} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^k \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^k W_i$$



5.4. Trabajo de la fuerza total y energía cinética: dependencia de la velocidad

Sea una partícula de masa m , inicialmente en reposo, bajo los efectos de una fuerza aplicada en la misma dirección; entonces el trabajo que hace la fuerza es

$$W_{total} = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \int_0^{\vec{v}} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{\vec{v}} = \frac{1}{2} m v^2 = E_c(v),$$

donde $E_c(v)$ es la *energía cinética* de la partícula, que puede escribirse también como

$$E_c(v) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2m} m^2 v^2 = \frac{p^2}{2m} = E_c(p).$$

Más generalmente, si la partícula no estaba inicialmente en reposo, con un cálculo análogo puede comprobarse que el trabajo de la fuerza le imprime a la partícula un cambio de velocidad determinado por

$$W_{total} = E_c(v_2) - E_c(v_1) = \Delta E_c.$$



5.5. Fuerzas conservativas y energía potencial

Una fuerza es *conservativa* cuando define un campo vectorial *conservativo*, es decir, cuando existe una función $E_p(\vec{r})$, llamada *energía potencial*, tal que la siguiente integral curvilínea depende sólo de los puntos donde empieza y termina la trayectoria, no de la forma de la trayectoria en sí

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r}_1) - E_p(\vec{r}_2).$$

La condición anterior se cumple si, y sólo si, para cualquier trayectoria cerrada se verifica que $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. La energía potencial constituye un *campo escalar* asociado al campo vectorial de la fuerza conservativa. La relación entre ambos campos es

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla E_p(\vec{r}).$$

Nota: No hay que confundir el operador *gradiente*, ∇ , que tiene una expresión que depende de las coordenadas, con el operador *incremento* Δ .

Nota: La energía potencial, como campo escalar, queda determinada salvo una constante; nótese que el operador gradiente de la anterior expresión la haría desaparecer.

Nota: Como se dijo, solo realizará trabajo la componente de la fuerza que es tangencial a la trayectoria. Esto implica que, para *fuerzas centrales*, las dirigidas en la dirección radial, el trabajo dependerá de las distancias inicial y final al origen. Considerando coordenadas esféricas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\vec{r}) = F(\rho) \vec{e}_\rho \\ d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \text{sen } \phi \vec{e}_\theta + \rho d\phi \vec{e}_\phi \end{array} \right. \rightarrow W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho) d\rho.$$

Por este motivo, todas las fuerzas centrales son fuerzas conservativas. Ejemplos de estas fuerzas son las debidas a los campos gravitatorio y electrostático (se verán más adelante), la tensión de un péndulo que gira o la fuerza restauradora de un muelle o resorte.



5.6. Trabajo de las fuerzas conservativas y energía potencial: dependencia de la posición

El trabajo total que realiza una fuerza conservativa sobre una partícula de masa m , la mueve de una posición a otra, de manera que se cumple que

$$W_c = -\Delta E_p,$$

Nota: Una vez que se determina el valor de la energía potencial para una posición \vec{r}_0 , la cantidad de ΔE_p no dependería de una posible constante en la definición de la energía



5.7. Trabajo de las fuerzas no conservativas y energía mecánica: dependencia de la velocidad y la posición

El trabajo total que realizan sobre una partícula varias fuerzas, algunas conservativas y otras no conservativas, modifican la velocidad y la posición de una partícula según

$$\begin{cases} W_{total} = W_c + W_{nc} \\ W_{total} = \Delta E_c \\ W_c = -\Delta E_p \end{cases} \rightarrow W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta(E_c + E_p),$$

por lo que

$$W_{nc} = \Delta E_M,$$

con la *energía mecánica* $E_M = E_c + E_p$ ó $E_M(v, \vec{r}) = E_c(v) + E_p(\vec{r}) = E_c(v(t)) + E_p(\vec{r}(t))$. Es útil hacerse las preguntas «¿Qué fuerzas hay?», «¿Cuáles son conservativas y cuáles no?» y «¿Cuáles realizan trabajo y cuáles no?». Porque, por ejemplo:

- En un movimiento horizontal, el peso es una fuerza conservativa (por deberse a un campo gravitatorio) pero no realiza trabajo (por ser perpendicular a la trayectoria).
- En un movimiento vertical, el peso es una fuerza conservativa y sí realiza trabajo (convierte la energía potencial en cinética).
- La fuerza debida al campo magnético (se verá más adelante) no es conservativa y no realiza trabajo (es perpendicular a la trayectoria).
- La fuerza de rozamiento no es una fuerza conservativa (disipa energía) y sí realiza trabajo.

Para resolver muchos problemas es suficiente calcular W_{nc} a partir de su definición y utilizarlo en la ecuación anterior.

Consecuencias

- Cuando hay fuerzas conservativas que hacen trabajo, los ejercicios y problemas suelen resolverse calculando W_{nc} por dos caminos:

$$\begin{cases} W_{nc} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{nc} d\vec{r} \\ W_{nc} = \Delta E_M \end{cases}$$

- 5.7.1. Cuando no hay fuerzas no conservativas, o las hay pero no realizan trabajo (por ser perpendiculares a la trayectoria en todo momento), se cumple el **principio de conservación de la energía (mecánica)**

$$\text{Si } W_{nc} = 0 \rightarrow E_M(t) = E_M(0)$$

Si sólo hay fuerzas conservativas, éstas tienden a convertir energía cinética en potencial, y viceversa.



5.8. Potencia

La *potencia instantánea* mide la capacidad (cantidad y rapidez) de hacer trabajo en cada instante.

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{v}(t)$$

y la *potencia media*

$$\langle P \rangle(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} dW(t)}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{W}{t_2 - t_1} \quad (\text{Potencia media en } [t_1, t_2])$$

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle P \rangle(t, t + \Delta t) \quad (\text{Potencia instantánea en } t)$$



5.9. Ligaduras energéticas

Se cumple que

$$E_c \geq 0 \rightarrow E_M = E_c + E_p \geq E_p$$

lo que le impone al movimiento ciertas restricciones o ligaduras. Estas restricciones, para unas energías y sistema de referencia determinados, condicionan directamente los valores de v , e indirectamente los valores de las posibles posiciones y aceleraciones. Los puntos en que

$$E_c = 0 \rightarrow E_M = E_p$$

se llaman *puntos de retorno*, porque $v=0$. Los extremos de E_p son puntos de equilibrio: si se trata de un mínimo, el punto es de *equilibrio estable*, mientras que si se trata de un máximo es uno de *equilibrio inestable*. Algunos sistemas concretos bien conocidos, donde se conocen las expresiones de las energías, son los *pozos de potencial* y las *barreras de potencial*.



5.10. Fuerzas restauradoras (parte 2 de 2)

Este tipo de fuerzas se empezó a estudiar en el apartado de dinámica de una partícula. Según la ley de Hooke, $\vec{F}(x) = -k x \vec{e}_x$.

$$E_c(v) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Por ser conservativas, para partículas sometidas a este tipo de fuerzas puede definirse la energía potencial.

$$E_p(x) = \int -\vec{F} d\vec{r} = \int k x dx = \frac{1}{2} k x^2 + cte \quad (\text{usualmente se toma } cte = 0)$$

Resolviendo la ecuación del movimiento, se obtiene la posición en función del tiempo, $x(t) = A \cos(\sqrt{k m^{-1}} t + c)$, donde A y c quedan determinadas por:

$$\begin{cases} E_M = E_c + E_p \\ E_c = 0 \end{cases} \rightarrow E_M = \frac{1}{2} k x_A^2 + cte \rightarrow x_A = \pm \sqrt{\frac{2(E_M - cte)}{k}} \rightarrow A = \sqrt{\frac{2(E_M - cte)}{k}}$$

Nota: Equivalentemente, dada A puede determinarse E_M .

$$x(0) = A \cos(c) \rightarrow c = \arccos\left(\frac{x(0)}{A}\right)$$

Por último, utilizando la expresión explícita de la posición en función del tiempo:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m A^2 \operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + c\right) \frac{k}{m}$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + c\right) + cte \quad (\text{usualmente se toma } cte = 0)$$



5.11. Mecánica Relativista

Energía cuando la masa depende de la velocidad

Supongamos que la partícula está inicialmente en reposo, en el origen, y que va a ser movida en línea recta (en este caso, la dirección no depende del tiempo y la fuerza se aplica únicamente a mover la partícula).

$$\begin{aligned} W_{total} &= \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} \frac{d(m(v)\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{v}} \vec{v} \cdot d(m(v)\vec{v}) = \left[\vec{v} \cdot m(v)\vec{v} - \int m(v)\vec{v} \cdot d\vec{v} \right]_0^{\vec{v}} \\ &= \left[m(v)v^2 - m(0) \int \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} dv \right]_0^v = \left[m(v)v^2 + m(0)c^2 \gamma(v)^{-1} \right]_0^v \\ &= \left[m(v)v^2 + m(v)c^2 \gamma(v)^{-2} \right]_0^v = \left[m(v) \right]_0^v c^2 = m(v)c^2 - m(0)c^2 = E(v) - E(0) = E_c(v) \end{aligned}$$

donde se han definido la *energía total*, $E(v) = m(v)c^2 = \gamma(v)m(0)c^2$, y la *energía en reposo*, $E(0) = m(0)c^2$. Se cumple que

$$E(v) = E_c(v) + E(0).$$

La relación $E(0) = m(0)c^2$ indica que la energía y la masa son conceptos equivalentes. Esta equivalencia implica una **generalización de la ley de conservación de la energía**, para que lo que se conserve sea la suma de masa y energía.

Más generalmente, si la partícula no estaba inicialmente en reposo,

$$W_{total} = \left[m(v) \right]_{v_1}^{v_2} c^2 = m(v_2)c^2 - m(v_1)c^2 = \Delta E_c(v)$$

Se cumple la siguiente relación entre energía, momento lineal y masa:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

La transformación del momento y la energía, entre dos sistemas de referencia, es:

$$\begin{cases} \tilde{p}_x = \gamma \left(p_x - \frac{v E}{c^2} \right) \\ \tilde{p}_y = p_y \\ \tilde{p}_z = p_z \\ \tilde{E} = \gamma (E - v p_x) \end{cases}$$



6. Energía, trabajo y potencia para un sistema de partículas

6.1. Trabajo

Sea W_{int}^i el trabajo que las fuerzas interiores hacen sobre la partícula i -ésima, y sea W_{ext}^i el que realizan las fuerzas exteriores; sea \vec{F}_{ext}^i la fuerza externa que actúa sobre la partícula i -ésima, y sea \vec{F}_{int}^{ij} la fuerza que hace la partícula j -ésima sobre la partícula i -ésima; entonces se tiene que

$$W_{total} = W_{int} + W_{ext},$$

donde (el sumatorio $\sum_{i \neq j}$ es doble)

$$W_{int} = \sum_i^n W_{int}^i = \sum_{i \neq j} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{int}^{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

y

$$W_{ext} = \sum_i W_{ext}^i = \sum_i \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{ext}^i \cdot d\vec{r}_i.$$

Para el trabajo interno, puede escribirse también

$$W_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_{\vec{r}_{ij}^1}^{\vec{r}_{ij}^2} \vec{F}_{int}^{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$



6.2. Superposición: También se cumple, como para el caso de una partícula.



6.3. Trabajo de la fuerza total y energía cinética: dependencia de la velocidad

Se puede probar que

$$W_{total} = \Delta E_c,$$

donde la *energía cinética* del sistema se define como

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_c^i, \text{ o, en rigor, } E_c(\{v_i\}) = \sum_{i=1}^n E_c^i(v_i).$$

Además de la clasificación anterior entre fuerzas interiores y exteriores, es necesario hacer (dentro de cada una de estos tipos de fuerzas) la distinción entre conservativas y no conservativas.

$$W_{total} = W_{int} + W_{ext} = W_{int,c} + W_{ext,c} + W_{int,nc} + W_{ext,nc} = W_c + W_{nc}.$$



6.4. Trabajo de las fuerzas conservativas y energía potencial: dependencia de la posición

Cuando hay fuerzas interiores conservativas, se puede escribir $\vec{F}_{int}^{ij} = -\nabla E_p^{ij}$ y, por tanto (ver la nota de abajo),

$$W_{int,c} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_{\vec{r}_{ij}^1}^{\vec{r}_{ij}^2} \nabla E_p^{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_{E_p^{ij,1}}^{E_p^{ij,2}} dE_p^{ij} = -\Delta E_p^{int},$$

para la *energía potencial interna*, definida como

$$E_p^{int} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} E_p^{jk}, \quad \text{o, en rigor, } E_p^{int}(\{\vec{r}_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} E_p^{jk}(\vec{r}_j, \vec{r}_k).$$

Nota: Sea \vec{r}_u un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$, en general, $df = \nabla f \cdot \vec{r}_u$ expresa la derivada direccional, es decir, la tasa de variación de la función f en la dirección de $d\vec{r}$.

Esto implica que

$$\begin{cases} W_{total} = W_{int} + W_{ext} \\ W_{total} = \Delta E_c \\ W_{int} = W_{int,c} \\ W_{int,c} = -\Delta E_p^{int} \end{cases} \rightarrow W_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_p^{int} = \Delta (E_c + E_p^{int}),$$

y, si se define la *energía mecánica propia* del sistema se define como

$$E_M^{prop} = E_c + E_p^{int}, \quad \text{o, en rigor, } E_M^{prop}(\{v_i\}, \{\vec{r}_i\}) = E_c(\{v_i\}) + E_p^{int}(\{\vec{r}_i\}),$$

se tiene que

$$\text{Si } W_{int} = W_{int,c} \rightarrow W_{ext} = \Delta E_M^{prop}.$$

Consecuencias

- 6.4.1. Cuando las fuerzas internas son conservativas y no hay fuerzas externas o no realizan trabajo neto, se cumple la **conservación de la energía mecánica propia**

$$\text{Si } \begin{cases} W_{int} = W_{int,c} \\ W_{ext} = 0 \end{cases} \rightarrow E_M^{prop}(t) = E_M^{prop}(0).$$

Cuando hay fuerzas exteriores conservativas, se puede escribir $\vec{F}_{ext}^i = -\nabla E_p^i$ y, por tanto,

$$W_{ext,c} = -\sum_i^n \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla E_p^i \cdot d\vec{r}_i = -\sum_i^n \int_{E_p^1}^{E_p^2} dE_p^i = -\Delta E_p^{ext},$$

donde la *energía potencial externa* del sistema se define como

$$E_p^{ext} = \sum_{i=1}^n E_p^i(\vec{r}_i), \quad \text{o, en rigor, } E_p^{ext}(\{\vec{r}_i\}) = \sum_{i=1}^n E_p^i(\vec{r}_i).$$

Consecuencias

- 6.4.2. Cuando no hay fuerzas externas conservativas, o las hay pero no realizan trabajo neto, se cumple la **conservación de la energía potencial externa**

$$\text{Si } W_{ext,c} = 0 \rightarrow E_p^{ext}(t) = E_p^{ext}(0).$$



6.5. Trabajo de las fuerzas no conservativas y energía mecánica: dependencia de la velocidad y la posición

Se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{total} = W_c + W_{nc} \\ W_c = W_{int,c} + W_{ext,c} \\ W_{nc} = W_{int,nc} + W_{ext,nc} \\ W_{total} = \Delta E_c \\ W_{int,c} = -\Delta E_p^{int} \\ W_{ext,c} = -\Delta E_p^{ext} \end{array} \right. \rightarrow W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p^{int} + \Delta E_p^{ext} = \Delta (E_c + E_p^{int} + E_p^{ext}),$$

por lo que, si se define la *energía mecánica total* del sistema como

$$E_M = E_M^{prop} + E_p^{ext}, \quad \text{o, en rigor, } E_M(\{v_i\}, \{\vec{r}_i\}) = E_M^{prop}(\{v_i\}, \{\vec{r}_i\}) + E_p^{ext}(\{\vec{r}_i\}),$$

entonces

$$W_{nc} = \Delta E_M.$$

Consecuencias

- 6.5.1. Cuando no hay fuerzas no conservativas, o las hay pero no realizan trabajo neto, se cumple la **conservación de la energía mecánica (total)**

$$\text{Si } W_{nc} = 0 \rightarrow E_M(t) = E_M(0).$$



6.6. Fuerzas no conservativas, temperatura, calor y primer principio de la Termodinámica

Esencialmente, sólo existen energías potenciales y cinéticas (posición y velocidad). Las energías cinética y potencial microscópicas de las partículas son tan heterogéneas que no suelen poder producir una energía cinética y potencial macroscópica del sistema (una botella de gas no se eleva un metro al calentarla, por ejemplo). Las fuerzas no conservativas macroscópicas, a veces llamadas *disipativas*, suelen variar la energía cinética microscópica de las partículas, no la del sistema. La energía cinética se puede relacionar con el estado microscópico de movimiento de las partículas, que se evalúa a través de la variable macroscópica *temperatura*. El traspaso de temperatura se puede medir a través de la variable *calor*.

Se cumple que

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{total} = W_c + W_{nc} \\ W_c = W_{int,c} + W_{ext,c} \\ W_{nc} = W_{int,nc} + W_{ext,nc} \\ W_{total} = \Delta E_c \\ W_{int,c} = -\Delta E_p^{int} \end{array} \right. \rightarrow W_{int,nc} + W_{ext,nc} + W_{ext,c} = \Delta E_c + \Delta E_p^{int} = \Delta E_M^{prop},$$

y, si se redefinen la *energía interna* del sistema $U = E_M^{prop}$ y el *calor absorbido* $Q = W_{int,nc}$, se llega a

$$\Delta U = Q + W_{ext}.$$

6.6.1. Esta expresión se conoce como **primer Principio de la Termodinámica**.

- El trabajo realizado sobre el sistema, W_{ext} , suele ser de tipo mecánico.
- Cuando no hay fuerzas externas conservativas (campo gravitatorio, por ejemplo) o su trabajo es despreciable (las moléculas de un gas pueden moverse más rápidamente manteniendo la misma distribución de posición), $W_{ext,c} = -\Delta E_p^{ext} = 0$ y se tiene que

$$\Delta U = Q + W_{ext,nc}.$$

- Cuando el trabajo no modifica el movimiento macroscópico del sistema, $\frac{1}{2} M V^2$ es constante y ΔE_c tiene en cuenta la energía cinética con respecto al centro de masas.

Nota: En algunos casos se utiliza el trabajo realizado por el sistema, por lo que aparece un $-W_{ext}$ en vez de W_{ext} .

Nota: Suele utilizarse, para el trabajo y el calor, uno de los criterios de signos siguientes:

	Calor		Trabajo	
	Absorbido	Emitido	Realizado por el sistema	Realizado sobre el sistema
Criterio termodinámico	> 0	< 0	> 0	< 0
Criterio IUPAC	> 0	< 0	< 0	> 0

Nota: El primer principio se puede formular equivalentemente en términos de la imposibilidad de construir una máquina de funcionamiento cíclico que produzca trabajo sin utilizar una cantidad equivalente de energía (esta máquina ideal se denomina *móvil perpetuo de primera especie*).



6.7. Energías en otro sistema inercial (por ejemplo, el del centro de masas)

Las anteriores energías varían como:

- Energía cinética: $\tilde{E}_c = E_c - \frac{1}{2} M V^2$ (*Teorema de König*)
- Energía potencial interna: No varía, porque depende de las distancias entre las partículas, no del sistema en que se midan: $\tilde{E}_p^{int} = E_p^{int}$
- Energía potencial externa: Tampoco depende, porque depende de las distancias entre las «causas» de los potenciales y las partículas: $\tilde{E}_p^{ext} = E_p^{ext}$
- Energía mecánica propia: $\tilde{E}_M^{prop} = E_M^{prop} - \frac{1}{2} M V^2$
- Energía mecánica total: $\tilde{E}_M = E_M - \frac{1}{2} M V^2$

Es interesante escribir, con respecto al centro de masas,

$$E_M^{prop} = E_c + E_p^{int} = \frac{1}{2} M V^2 + E_c^{cm} + E_p^{int} = \frac{1}{2} M V^2 + E_{int},$$

donde la *energía interna* recoge los términos de energía cinética (medida con respecto al centro de masas) y la energía potencial interna. Esta energía, de carácter microscópico, no siempre es directamente medible, por lo que suele utilizarse una nueva cantidad medible: la *temperatura*. Si además el sistema está sometido a fuerzas conservativas externas,

$$E_M = E_M^{prop} + E_p^{ext} = \frac{1}{2} M V^2 + E_{int} + E_p^{ext}.$$



6.8. Potencia

Una vez definidos los trabajos, sería posible definir las potencias. No obstante, a este nivel sólo es útil definirlo para el caso de sólidos rígidos.



6.9. Ligaduras energéticas

Como para el caso de una partícula, también existen ligaduras, aunque ahora de un complejidad mucho mayor. Se suelen tener en cuenta de forma macroscópica, como hace la Termodinámica, rama que estudia la relación entre diversas magnitudes estadísticas o macroscópicas.



6.10. Sólido rígido (parte 3 de 3)

Según la relación de las expresiones de la energía cinética en dos sistemas de referencia inerciales, para un sistema de partículas discreto:

$$E_c = \frac{1}{2} M V(t)^2 + E_c^{cm} = \frac{1}{2} M V(t)^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M V(t)^2 + \frac{1}{2} I(t) \omega(t)^2.$$

Para un sistema de partículas continuo:

$$E_c = \frac{1}{2} M V(t)^2 + E_c^{cm} = \frac{1}{2} M V(t)^2 + \int_S \frac{1}{2} v_{dm}(t)^2 dm = \frac{1}{2} M V(t)^2 + \frac{1}{2} I(t) \omega(t)^2.$$

(La letra I representa el momento de inercia del sólido.) En este caso, a la energía cinética medida desde el centro de masas a veces se le llama *energía cinética de rotación*,

$$E_c^{cm} = \frac{1}{2} I(t) \omega(t)^2 = \frac{1}{2I} I(t)^2 \omega(t)^2 = \frac{L(t)^2}{2I}.$$

Para calcular el trabajo que hace rotar un sólido, se puede utilizar el *teorema de las fuerzas vivas para la rotación*

$$W^{cm} = \Delta E_c^{cm} = \frac{1}{2} I(t_2) \omega(t_2)^2 - \frac{1}{2} I(t_1) \omega(t_1)^2.$$

También podría hacerse el cálculo directo

$$W^{cm} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_\theta ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_\theta d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M(t) d\theta.$$

Cuando $M(t) = M(0)$,

$$W^{cm} = M(0) \Delta \theta.$$

Nota: En el tema de Termodinámica, se vuelve al concepto de trabajo realizado por o sobre un sistema de partículas, así como algunas formas de cuantificarlo. Si un sistema ejerce una fuerza sobre su exterior, se tendrá en cuenta el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza; para controlar y medir este desplazamiento, en el laboratorio se suele recurrir a un cilindro con un pistón móvil, por ejemplo.



7. Campo gravitatorio

7.1. Introducción

Basándose en las leyes de Kepler, Newton indujo la *Ley de la Gravitación Universal*, que afirma que dos masas cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al valor de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Para dar una explicación a la existencia de fuerzas a distancia, sin contacto físico (como en los apartados anteriores), se introdujo el concepto de *campo*. Cada partícula masiva crea un campo a su alrededor, y cada partícula masiva sufre un efecto cuando se encuentra en un campo; por tanto, dos partículas masivas interactúan porque cada una está en el campo de la otra. La gravitación es una de las formas fundamentales de la Naturaleza para causar fuerza. Una vez causada, y como fuerza que es, le es aplicable todo lo visto en Dinámica (aceleraciones, trabajo, energía, etcétera).



7.2. Campos vectoriales

Supónganse dos partículas de masas, M y m , situadas en \vec{r}_M y \vec{r}_m . (Conviene hacer un dibujo con el triángulo que forman el origen y la posición de las dos partículas.) Si indicamos en el superíndice de la fuerza y del campo cuál es la partícula «protagonista», en el sentido de sobre quién actúa la fuerza y quién crea el campo, respectivamente, la expresión de la fuerza gravitatoria que actúa sobre m ,

$$\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|^2} \vec{r}_u,$$

donde C es la *constante de gravitación universal* y \vec{r}_u es un vector unitario que sale de la posición de M y apunta a la otra posición. La fuerza es directamente proporcional al producto de las dos masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Nota: Esta fórmula, así como todas las que se van a presentar a continuación, puede encontrarse en los libros de distinta forma, como $\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|^3} (\vec{r}_m - \vec{r}_M)$, o, en coordenadas polares y si M está en el origen, como

$$\vec{F}^{(m)}(\rho \vec{e}_\rho) = -C \frac{M m}{\rho^2} \vec{e}_\rho \quad (\text{no obstante, esta última expresión no suele ser útil para más de dos partículas}).$$

Nota: La partícula M también es atraída por m con una fuerza como la dada pero de sentido contrario.

Se define el campo gravitatorio generado por M en una posición cualquiera \vec{r} como

$$\vec{G}^{(M)}(\vec{r}) = -C \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^2} \vec{r}_u.$$

En general, para cualquier campo gravitatorio $\vec{G}(\vec{r})$, causado por una distribución de masa cualquiera (y no necesariamente otra partícula), se cumple que si una partícula de masa m ocupa la posición \vec{r}_m , sobre ella actúa una fuerza

$$\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = m \vec{G}(\vec{r}_m).$$



7.3. Campos escalares

La fuerza gravitatoria es una fuerza central y, por tanto, conservativa. Esto implica que se puede

definir la energía potencial que tiene una partícula de masa m por estar situada en \vec{r}_m ,

$$E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|},$$

y el potencial, que es un campo escalar generado por M en \vec{r} y asociado al campo gravitatorio $\vec{G}^{(M)}(\vec{r})$,

$$V^{(M)}(\vec{r}) = -C \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_M|}.$$

(Estas fórmulas están dadas para que tomen el valor cero en el infinito, como se ve más abajo.) En general, para un potencial gravitatorio general $V^{(G)}(\vec{r})$, asociado a un campo cualquiera $\vec{G}(\vec{r})$ (y no necesariamente al campo creado por otra partícula), se cumple que, para una partícula m situada en \vec{r}_m ,

$$E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = m V^{(G)}(\vec{r}_m).$$



7.4. Relación entre campos vectoriales y escalares

Debido a la relación matemática que siempre hay entre un campo vectorial conservativo y su campo escalar asociado, se tiene que, para una partícula m situada en \vec{r}_m :

$$\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = -\nabla E_p^{(m)}(\vec{r}_m)$$

y, para campos cualesquiera en \vec{r} ,

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\nabla V^{(G)}(\vec{r}),$$

donde ∇ es el operador gradiente.



7.5. Principio de superposición

Cuando una masa m se ve atraída por varias masas, por ejemplo, M_1 y M_2 , se cumple que las fuerzas se suman linealmente, es decir,

$$\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = m \vec{G}^{(M_1)}(\vec{r}_m) + m \vec{G}^{(M_2)}(\vec{r}_m).$$

Esto significa que la fuerza gravitatoria de Newton entre dos masas no se ve afectada por la presencia de otras masas. Entonces se cumplen también las siguientes implicaciones:

$$\vec{G}^{(M_1 \cup M_2)}(\vec{r}) = \vec{G}^{(M_1)}(\vec{r}) + \vec{G}^{(M_2)}(\vec{r}),$$

$$E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = m V^{(M_1)}(\vec{r}_m) + m V^{(M_2)}(\vec{r}_m)$$

y

$$V^{(M_1 \cup M_2)}(\vec{r}) = V^{(M_1)}(\vec{r}) + V^{(M_2)}(\vec{r}).$$

Nota: El principio de superposición también se cumple para diferenciales de masa infinitesimales.



7.6. Energía potencial, potencial y trabajo (caso de dos masas M y m)

Si se utiliza la posición relativa $\vec{s} = s \vec{r}_u$, medida en la recta que sale de M y pasa por m (conviene hacer un dibujo con los vectores), del cálculo del trabajo se deducen las definiciones de energía potencial y potencial. Sea $d\vec{s} = ds \vec{r}_u$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} W_c = \int_{s_1 \vec{u}}^{|\vec{r}_m - \vec{r}_M| \vec{u}} \vec{F}^{(m)}(\vec{r}_M + \vec{s}) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|} -C \frac{M m}{s^2} \vec{r}_u \cdot d s \vec{r}_u = C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|} + cte \rightarrow \\ W_c = -\Delta E_p^{(m)}(\vec{r}) = -m \Delta V^{(M)}(\vec{r}) \\ E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|} + cte \quad \text{y} \quad V^{(M)}(\vec{r}) = -C \frac{M}{|\vec{r} - \vec{r}_M|} + cte. \end{array} \right.$$

La energía potencial está determinada salvo por una constante, que queda determinada al fijar uno de los valores de la función. Suelen ser de interés:

- Cuando $E_p^{(m)}(\infty) = 0 \rightarrow cte = 0 \rightarrow E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|}$
- Cuando $E_p^{(m)}(R_T \vec{u}) = 0 \rightarrow cte = C \frac{M m}{R_T} \rightarrow E_p^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_M|} + C \frac{M m}{R_T}$

Nota: Estas fórmulas son válidas para posiciones que están fuera del volumen real de ambas masas, pese a que se las suponga puntuales, es decir, de volumen despreciable.



7.7. Teorema de Gauss

Una superficie puede caracterizarse por un vector cuyo módulo sea el área y cuya dirección sea perpendicular a la superficie: \vec{a} . Entonces, el *flujo gravitatorio* es una medida de la «densidad de un campo vectorial», en este caso el gravitatorio \vec{G} , y viene dado por:

- Para una superficie plana: $\Phi^{(G)} = \vec{G} \cdot \vec{a}$
- Para un elemento de superficie infinitesimal: $d\Phi^{(G)} = \vec{G} \cdot d\vec{a}$
- Para una superficie cualquiera: $\Phi^{(G)} = \int_S d\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{a}$

El *teorema de Gauss* afirma que:

$$\Phi^{(G)} = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{a} = -4\pi C M,$$

donde S es una superficie cerrada cualquiera y M es la masa total contenida en ella. Para problemas con una geometría apropiada, suele elegirse S de modo que $\vec{G} \cdot d\vec{a} = |\vec{G}| \cdot da$ con $|\vec{G}|$ constante en la superficie (sólo cambia la dirección), lo que permite utilizar el teorema para calcular fácilmente $|\vec{G}|$ (la dirección se deduce de la geometría involucrada en el problema).



7.8. Cálculo de los campos vectoriales y escalares

Hay varios métodos para calcular los campos vectoriales o escalares:

- (1) Cuando hay distribuciones continuas de masa, utilizando cálculo infinitesimal y las expresiones derivadas a partir de las anteriores

$$d\vec{G}^{(dM)}(\vec{r}) = -C \frac{dM}{|\vec{r} - \vec{r}_{dM}|^2} \vec{r}_u \quad \text{y} \quad dV^{(dM)}(\vec{r}) = -C \frac{dM}{|\vec{r} - \vec{r}_{dM}|}.$$

- (2) Cuando es posible, porque se conozca un campo y se desee hallar el otro, utilizando la relación entre campos vectoriales y escalares, sean las fórmulas directas dadas anteriormente o las inversas (y aplicando cálculo infinitesimal)

$$dE_p^{(m)}(\vec{r}) = -\vec{F}^{(m)}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{y} \quad dV^{(G)}(\vec{r}) = -\vec{G}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Nota: Sea \vec{r}_u un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$, en general, $df = \nabla f \cdot \vec{r}_u$ expresa la derivada direccional, es decir, la tasa de variación de la función f en la dirección de $d\vec{r}$.

- (3) Cuando la geometría lo aconseje, utilizando la ley de Gauss.



7.9. Movimiento en un campo gravitatorio

Cuando una partícula de masa m se mueve a merced únicamente de la fuerza debida a un campo gravitatorio, se cumple que

$$\begin{cases} \vec{F}^{(m)} = m_g \vec{G} \\ \vec{F}^{(m)} = m_i \vec{a} \\ m_g = m_i \end{cases} \rightarrow \vec{a} = \vec{G}.$$

donde la última ecuación indica la igualdad, que tuvo que ser probada experimentalmente, entre las masas gravitatoria e inercial.

La fuerza gravitatoria es atractiva por definición, es decir, tiende a minimizar la distancia entre las masas. Por tanto, a partir de la definición del potencial o de la energía potencial, se deduce que la Naturaleza causa que los movimientos (en estos campos) tiendan a minimizar la energía potencial, lo que corresponde a situaciones más estables.



7.10. Peso

Como caso particular de interacción entre dos cuerpos masivos, se obtiene el *peso*, que es la fuerza que experimenta un cuerpo por estar en el campo gravitatorio que crea la Tierra (u otro planeta). Se cumple que, para una partícula m situada en \vec{r}_m ,

$$\vec{F}^{(m)}(\vec{r}_m) = -C \frac{M_T m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_{M_T}|^2} \vec{r}_u = m \vec{G}^{(M_T)}(\vec{r}_m),$$

donde M_T es la masa de la Tierra y

$$\vec{G}^{(M_T)}(\vec{r}) = -C \frac{M_T}{|\vec{r} - \vec{r}_{M_T}|^2} \vec{r}_u$$

es el campo que crea en una posición cualquiera \vec{r} .

Nota: Esta fórmula es válida cuando m está fuera de la Tierra, porque sólo en este caso se puede representar la Tierra como una partícula puntual de volumen nulo. Para calcular el peso dentro de una mina, por ejemplo, se obtendría otra fórmula (utilizando el teorema de Gauss, por ejemplo).

Para posiciones en la superficie de la Tierra, es decir, cuando $|\vec{r} - \vec{r}_{M_T}| \approx R_T$, por comodidad

se calcula el valor de la gravedad

$$\vec{G}^{(M_T)}(\vec{r}) = -C \frac{M_T}{R_T^2} \vec{r}_u = -9,8 \text{ m/s}^2 \vec{r}_u,$$

por lo que el peso de una masa m en una posición \vec{r}_m es

$$\vec{P}^{(m)}(\vec{r}_m) = m \vec{G}^{(M_T)}(\vec{r}_m).$$



7.11. Energía potencial en la superficie de la Tierra

Otra aproximación que se suele hacer es la de la energía potencial, para alturas cercanas a la superficie de la Tierra, donde se toma el cero. Sea $h = |\vec{r}_m - \vec{r}_{M_T}| - R_T$

$$\begin{aligned} E_p^{(m)}(\vec{r}_m) &= -C \frac{M_T m}{|\vec{r}_m - \vec{r}_{M_T}|} + C \frac{M_T m}{R_T} = C M_T m \left(\frac{|\vec{r}_m - \vec{r}_{M_T}| - R_T}{|\vec{r}_m - \vec{r}_{M_T}| R_T} \right) = C M_T m \left(\frac{h}{(h + R_T) R_T} \right) \\ &= C M_T m \left(\frac{h}{\left(\frac{h}{R_T} + 1\right) R_T^2} \right) = m C \frac{M_T}{R_T^2} \left(\frac{h}{\left(\frac{h}{R_T} + 1\right)} \right) \approx m |\vec{G}^{(M_T)}| h, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que, matemáticamente, $\left(\frac{h}{R_T} + 1\right)^{-1} \approx 1$ cuando $\frac{h}{R_T} \approx 0$.



8. Campo electrostático

8.1. Introducción

La *Ley de Coulomb* afirma que dos cargas cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Como fuerza a distancia que es, también para ella se introdujo el concepto de *campo*. Cada partícula crea un campo a su alrededor, y cada partícula sufre un efecto cuando se encuentra en un campo; por tanto, dos partículas cargadas interactúan porque cada una está en el campo de la otra. La fuerza electromagnética, más general que la electrostática, es también una de las fuerzas fundamentales de la Naturaleza. Como fuerza que es, le es aplicable todo lo visto en Dinámica (aceleraciones, trabajo, energía, etcétera).



8.2. Campos vectoriales

Supónganse dos partículas de cargas, Q y q , situadas en \vec{r}_Q y \vec{r}_q . (Conviene hacer un dibujo con el triángulo que forman el origen y la posición de las dos partículas.) Si indicamos en el superíndice de la fuerza y del campo cuál es la partícula «protagonista», en el sentido de sobre

quién actúa la fuerza y quién crea el campo, respectivamente, la expresión de la fuerza electrostática que actúa sobre q ,

$$\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|^2} \vec{r}_u,$$

donde K es la *constante de Coulomb* y \vec{r}_u es un vector unitario que sale de la posición de Q y apunta a la otra posición. La fuerza electrostática es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Nota: Esta fórmula, así como todas las que se van a presentar a continuación, puede encontrarse en los libros de distinta forma,

como $\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|^3} (\vec{r}_q - \vec{r}_Q)$, o, en coordenadas polares y si Q está en el origen, como

$$\vec{F}^{(q)}(\rho \vec{e}_\rho) = K \frac{Qq}{\rho^2} \vec{e}_\rho \quad (\text{no obstante, esta última expresión no suele ser útil para más de dos partículas}).$$

Nota: La constante de Coulomb se suele escribir también como $K = (4\pi\epsilon\epsilon_0)^{-1}$, donde ϵ es la *permitividad eléctrica en el medio* y ϵ_0 es la *permitividad eléctrica en el vacío*. Dado que los materiales tienen comportamientos muy distintos, en un primer estudio suele considerarse el vacío, para el que $K = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$.

Nota: Sobre la carga Q también actúa una fuerza, debida a q , como la dada pero de sentido contrario.

Se define el campo electrostático generado por Q en una posición cualquiera \vec{r} como

$$\vec{E}^{(Q)}(\vec{r}) = K \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^2} \vec{r}_u.$$

En general, para cualquier campo electrostático $\vec{E}(\vec{r})$, causado por una distribución de carga cualquiera (y no necesariamente otra partícula), se cumple que si una partícula de carga q ocupa la posición \vec{r}_q , sobre ella actúa una fuerza

$$\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_q) = q \vec{E}(\vec{r}_q).$$



8.3. Campos escalares

La fuerza electrostática es una fuerza central y, por tanto, conservativa. Esto implica que se puede definir la energía potencial que tiene una partícula de carga q por estar situada en \vec{r}_q ,

$$E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|},$$

y el potencial, que es un campo escalar generado por Q en \vec{r} y asociado al campo electrostático $\vec{E}^{(Q)}$,

$$V^{(Q)}(\vec{r}) = K \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}.$$

(Estas fórmulas están dadas para que tomen el valor cero en el infinito, como se ve más abajo.) En general, para un potencial electrostático general $V^{(E)}(\vec{r})$, asociado a un campo cualquiera $\vec{E}(\vec{r})$ (y no necesariamente al campo creado por otra partícula), se cumple que, para una partícula q situada en \vec{r}_q ,

$$E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = q V^{(E)}(\vec{r}_q).$$



8.4. Relación entre campos vectoriales y escalares

Debido a la relación matemática que siempre hay entre un campo vectorial conservativo y su campo escalar asociado, se tiene que, para una partícula q situada en \vec{r}_q :

$$\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_q) = -\nabla E_p^{(q)}(\vec{r}_q)$$

y, para campos cualesquiera en \vec{r} ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V^{(E)}(\vec{r}),$$

donde ∇ es el operador gradiente.



8.5. Principio de superposición

Cuando una carga q se ve atraída o repelida por varias cargas, por ejemplo, Q_1 y Q_2 , se cumple que las fuerzas se suman linealmente, es decir,

$$\vec{F}^{(q)}(\vec{r}_q) = q\vec{G}^{(Q_1)}(\vec{r}_q) + q\vec{G}^{(Q_2)}(\vec{r}_q).$$

Esto equivale a decir que la fuerza electrostática de Coulomb entre dos cargas no se ve afectada por la presencia de otras cargas. Entonces se cumplen también las siguientes implicaciones:

$$\vec{E}^{(Q_1 \cup Q_2)}(\vec{r}) = \vec{E}^{(Q_1)}(\vec{r}) + \vec{E}^{(Q_2)}(\vec{r}),$$

$$E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = qV^{(Q_1)}(\vec{r}_q) + qV^{(Q_2)}(\vec{r}_q)$$

y

$$V^{(Q_1 \cup Q_2)}(\vec{r}) = V^{(Q_1)}(\vec{r}) + V^{(Q_2)}(\vec{r}).$$

Nota: El principio de superposición también se cumple para diferenciales de masa infinitesimales.



8.6. Energía potencial, potencial y trabajo (caso de dos cargas Q y q)

Si se utiliza la posición relativa $\vec{s} = s\vec{r}_u$, medida en la recta que sale de Q y pasa por q (conviene hacer un dibujo con los vectores), del cálculo del trabajo se deducen las definiciones de energía potencial y potencial. Sea $d\vec{s} = ds\vec{r}_u$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} W_c = \int_{s_1}^{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} \vec{F}^{(q)}(\vec{r}_Q + \vec{s}) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} K \frac{Qq}{s^2} \vec{r}_u \cdot ds \vec{r}_u = -K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} + cte \rightarrow \\ W_c = -\Delta E_p^{(q)}(\vec{r}) = -q \Delta V^{(Q)}(\vec{r}) \end{array} \right.$$

$$E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} + cte \quad \text{y} \quad V^{(Q)}(\vec{r}) = K \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} + cte.$$

La energía potencial está determinada salvo por una constante, que queda determinada al fijar uno de los valores de la función. Suelen ser de interés:

- Cuando $E_p^{(q)}(\infty) = 0 \rightarrow cte = 0 \rightarrow E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|}$

• Cuando $E_p^{(m)}(R_0 \vec{u})=0 \rightarrow cte = -K \frac{Qq}{R_0} \rightarrow E_p^{(q)}(\vec{r}_q) = K \frac{Qq}{|\vec{r}_q - \vec{r}_Q|} - K \frac{Qq}{R_0}$

Nota: Estas fórmulas son válidas para posiciones que están fuera del volumen real de ambas cargas, pese a que se las suponga puntuales, es decir, de volumen despreciable.



8.7. Teorema de Gauss

Una superficie puede caracterizarse por un vector cuyo módulo sea el área y cuya dirección sea perpendicular a la superficie: \vec{a} . Entonces, el *flujo electrostático* es una medida de la «densidad de un campo vectorial», en este caso el electrostático \vec{E} , y viene dado por:

- Para una superficie plana: $\Phi^{(E)} = \vec{E} \cdot \vec{a}$
- Para un elemento de superficie infinitesimal: $d\Phi^{(E)} = \vec{E} \cdot d\vec{a}$
- Para una superficie cualquiera: $\Phi^{(E)} = \int_S d\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a}$

El *teorema de Gauss* afirma que:

$$\Phi^{(E)} = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi K Q,$$

donde S es una superficie cerrada cualquiera y Q es la carga total contenida en ella. Para problemas con una geometría apropiada, suele elegirse S de modo que $\vec{E} \cdot d\vec{a} = |\vec{E}| \cdot da$ con $|\vec{E}|$ constante en la superficie (sólo cambia la dirección), lo que permite utilizar el teorema para calcular fácilmente $|\vec{E}|$ (la dirección se deduce de la geometría involucrada en el problema).



8.8. Cálculo de los campos vectoriales y escalares

Hay varios métodos para calcular los campos vectoriales o escalares:

- (1) Cuando hay distribuciones continuas de masa, utilizando cálculo infinitesimal y las expresiones derivadas a partir de las anteriores

$$d\vec{E}^{(dQ)}(\vec{r}) = K \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}_{dQ}|^2} \vec{r}_u \quad \text{y} \quad dV^{(dQ)}(\vec{r}) = K \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}_{dQ}|}.$$

- (2) Cuando es posible, porque se conozca un campo y se desee hallar el otro, utilizando la relación entre campos vectoriales y escalares, sean las fórmulas directas dadas anteriormente o las inversas (y aplicando cálculo infinitesimal)

$$dE_p^{(q)}(\vec{r}) = -\vec{F}^{(q)}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{y} \quad dV^{(E)}(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Nota: Sea \vec{r}_u un vector unitario en la dirección de $d\vec{r}$, en general, $df = \nabla f \cdot \vec{r}_u$ expresa la derivada direccional, es decir, la tasa de variación de la función f en la dirección de $d\vec{r}$.

- (3) Cuando la geometría lo aconseja, utilizando la ley de Gauss.



8.9. Movimiento en un campo electrostático

Cuando una partícula de carga q y masa m (existen partículas que tienen carga pero no masa) se mueve a merced únicamente de la fuerza debida a un campo electrostático, se cumple que

$$\begin{cases} \vec{F}^{(q)} = q \vec{E} \\ \vec{F}^{(q)} = m \vec{a} \end{cases} \rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}.$$

La fuerza electrostática tiende a minimizar la distancia entre las masas. Por tanto, a partir de la definición del potencial o de la energía potencial, se deduce que la Naturaleza causa que los movimientos (en estos campos) tiendan a minimizar la energía potencial, lo que corresponde a situaciones más estables.



8.10. Ecuaciones de Maxwell

Se cumple que

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \end{cases}$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio y ρ es la densidad de carga. (Para más detalles, véase el tema de campo electromagnético.)



9. Campo magnetostático

9.1. Introducción

Por motivos históricos, en algunos textos se encuentra la diferencia de notación y nominación entre *campo magnético* \vec{H} y vector *inducción magnética* \vec{B} . Son paralelos y están relacionados como se verá en el apartado de campo electromagnético. En otros textos se habla sólo de \vec{B} y se le llama campo magnético, y si es necesario se distingue entre el campo aplicado y el campo resultante dentro de un material.

Supongamos, como suele hacerse en Física clásica, que las perturbaciones son instantáneas, es decir, que se desplazan con velocidad infinita (en el tema del campo electromagnético se mencionan los retardos reales, que aparecen, por ejemplo, en los potenciales de Liénard-Wiechert de los campos que crea una carga puntual en movimiento). Esto implica que, por ejemplo, una carga q que se mueve a velocidad \vec{v} y que está en un instante en una posición \vec{r}_q , está instantáneamente –no con retardo– generando $\vec{B}(\vec{r})$.



9.2. Fuerza magnética

Supongamos la presencia de un campo magnético \vec{H} cuyo vector inducción magnética es $\vec{B}(\vec{r})$, que no depende del tiempo (es estacionario).

Sobre una carga puntual q a velocidad \vec{v}

$$\vec{F}^{(q)} = q \vec{v} \times \vec{B}.$$

Sobre un diferencial de carga dq a velocidad \vec{v}

$$d\vec{F}^{(dq)} = dq \vec{v} \times \vec{B}.$$

Sobre una distribución de carga Q a velocidad \vec{v}

$$\vec{F}^{(Q)} = \int_Q d\vec{F}^{(dq)} = \int_Q \vec{v} \times \vec{B} dq = \int_V \vec{v} \times \vec{B} \rho dv.$$

Sobre un hilo conductor y rectilíneo por el que pasa una intensidad I

$$\vec{F}^{(I)} = \sum_i \vec{F}^{(q_i)} = \sum_i q_i \vec{v} \times \vec{B} = \sum_i q_i \frac{\vec{l}}{t} \times \vec{B} = \frac{\sum_i q_i}{t} \vec{l} \times \vec{B} = I \vec{l} \times \vec{B}.$$

Sobre un diferencial de hilo conductor por el que pasa una intensidad I

$$d\vec{F}^{(dl)} = I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

Sobre un hilo conductor curvilíneo por el que pasa una intensidad I

$$\vec{F}^{(C)} = \int_C d\vec{F}^{(dl)} = I \int_C d\vec{l} \times \vec{B}.$$



9.3. Inducción magnética

Sea \vec{r}_u un vector unitario que apunta de la fuente q que crea \vec{B} a una posición cualquiera \vec{r} , es decir, $\vec{r}_u = (\vec{r} - \vec{r}_q) / |\vec{r} - \vec{r}_q|$.

Por una carga puntual q a velocidad \vec{v} y con posición en \vec{r}_q

$$\vec{B}^{(q)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2}.$$

Nota: También puede encontrarse, en la literatura $\vec{B}^{(q)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3}$.

Por un diferencial de carga dq a velocidad \vec{v} y con posición en \vec{r}_{dq}

$$d\vec{B}^{(dq)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_{dq}|^2}.$$

Por una distribución de carga Q a velocidad \vec{v} y con posición en \vec{r}_Q

$$\vec{B}^{(Q)}(\vec{r}) = \int_Q \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_{dq}|^2} dq = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{v} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_{dq}|^2} \rho dv.$$

Por un hilo conductor y rectilíneo por el que pasa una intensidad I , a una distancia lejana

$$\vec{B}^{(l)}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_i \vec{v} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\sum_i q_i) \vec{l} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{l} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^2}.$$

Por un diferencial de hilo conductor por el que pasa una intensidad I

$$d\vec{B}^{(dl)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_{dl}|^2}.$$

Nota: Esta expresión se conoce como *ley de Biot y Savart*.

Por un hilo conductor curvilíneo por el que pasa una intensidad I

$$\vec{B}^{(c)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_u}{|\vec{r} - \vec{r}_{dl}|^2}.$$



9.4. Cálculo de los campos vectoriales

Hay varios métodos para calcular los campos vectoriales o escalares:

- (1) Cuando hay distribuciones continuas de carga (la carga siempre está discretizada, pero se puede considerar continua para un diferencial de volumen), utilizando cálculo infinitesimal y las expresiones derivadas arriba para $d\vec{B}(\vec{r})$.
- (2) Como se verá en el tema de electromagnetismo, calculando primero los potenciales escalar y vectorial.



9.5. Movimiento en un campo magnetostático

Cuando una partícula de carga q y masa m (existen partículas que tienen carga pero no masa) se mueve a merced únicamente de la fuerza debida a un campo magnetostático, se cumple que

$$\begin{cases} \vec{F}^{(q)} = q \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{F}^{(q)} = m \vec{a} \end{cases} \rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}.$$

Como se ve, la aceleración es perpendicular a la velocidad, es decir, toda la aceleración es normal, y no hay aumento de la celeridad. Esto es característico de los movimientos circulares, por lo que el radio es

$$\frac{v(0)^2}{d} = \frac{q}{m} v(0) B \rightarrow d = \frac{m v(0)}{q B}.$$

Esta dependencia del radio de la masa, la velocidad y la carga, es utilizada para separar las partículas, puesto que se separarán según sus movimientos en círculos distintos.



9.6. Ecuaciones de Maxwell

Se cumple que

$$\begin{cases} \nabla \times (\mu^{-1} \vec{B}) = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio y \vec{J} es la densidad de corriente. (Para más detalles, véase el tema de campo electromagnético.)



10. Campo electromagnético

10.1. Introducción

En general, los campos eléctrico y magnético están interrelacionados: Oersted descubrió que una corriente eléctrica genera campo magnético; por otro lado, la ley de inducción de Faraday afirma que la variación de campo magnético causa campo eléctrico. Pese a que el comportamiento del campo electromagnético depende mucho de las condiciones de los materiales (conductores, dieléctricos, ferromagnéticos, diamagnéticos, etcétera), bajo ciertas condiciones es posible promediar y obtener ecuaciones generales.

Aunque en Física clásica también se puede hablar de «acción a distancia» y campos, se supone que las relaciones causa-efecto tienen lugar de forma instantánea, a velocidad infinita. En la teoría del campo electromagnético esta transmisión causa-efecto tiene lugar a la velocidad finita de la luz (velocidad de todas las ondas electromagnéticas), por lo que una perturbación o cambio tarda un tiempo $|\vec{r} - \vec{r}_M|/c$ en propagarse al punto \vec{r} si ha sido causada en \vec{r}_M .

Algunas definiciones:

- *Intensidad de campo eléctrico:* \vec{E}
- *Desplazamiento eléctrico:*

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \kappa \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

donde ϵ_0 es la *permitividad eléctrica en el vacío*, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ es el *vector polarización*, χ_e es la *susceptibilidad eléctrica*, κ es la *constante dieléctrica* y ϵ es la *permitividad eléctrica en la materia* (el material concreto)

- *Densidad de flujo magnético o inducción magnética:* \vec{B}
- *Intensidad de campo magnético:*

$$\vec{H} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \vec{M} = \mu_0^{-1} \vec{B} - \alpha \vec{B} = \mu_0^{-1} (1 - \alpha \mu_0) \vec{B} = \mu_0^{-1} (1 + \chi_m)^{-1} \vec{B} = \mu^{-1} \vec{B}$$

donde μ_0 es la *permeabilidad magnética en el vacío*, $\vec{M} = \alpha \vec{B}$ es el *vector imantación*, χ_m es la *susceptibilidad magnética* y μ es la *permeabilidad en la materia* (el material concreto)



10.2. Ecuaciones constitutivas

Las ecuaciones de Maxwell se obtienen al tomar promedios en las ecuaciones de Maxwell-Lorentz. Por tanto, son válidas cuando lo sean las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \mu^{-1} \vec{B} \\ \vec{J} = \gamma \vec{E} \end{cases}$$

donde \vec{J} es la *densidad de corriente de conducción* y γ es la *conductividad*.

Nota: Más allá de los límites de aplicabilidad de las ecuaciones constitutivas, puede que los anteriores vectores dependan del tiempo, de la dirección (materiales anisótopos), y los parámetros deban ser sustituidos por tensores simétricos, o puede que la relación entre los vectores sea no lineal (sustancias ferromagnéticas, antiferromagnéticas, ferroeléctricas, superconductoras).



10.3. Ecuaciones de Maxwell

Los campos están relacionados a través de:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{a} = \int_V \rho \, dv \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{a} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación (de cada sistema) es conocida como *ley de inducción de Faraday*, y la tercera (de cada sistema) como *teorema de Ampère modificado*. Integrando y utilizando los teoremas del rotacional (o de Stokes) y de la divergencia (o de Gauss), las expresiones diferenciales del primer grupo dan lugar a las expresiones integrales del segundo grupo.



10.4. Condiciones de contorno

Para dominios limitados o bordes entre distintos medios o materiales, deben verificarse las *condiciones de contorno* entre las componentes tangencial y normal a la superficie:

$$\begin{cases} E_{t,1} = E_{t,2} \\ D_{n,1} = D_{n,2} + \sigma_s \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_s \\ B_{n,1} = B_{n,2} \end{cases}$$

donde σ_s es la densidad de carga en la superficie, \vec{n} es un vector normal a la superficie y \vec{j}_s es la corriente superficial.



10.5. Ecuación de onda

A partir de las ecuaciones de Maxwell y las ecuaciones constitutivas, se deduce que los campos

\vec{E} y \vec{H} verifican las siguientes ecuaciones de onda:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$



10.6. Potenciales escalar y vectorial

Existencia (por motivos matemáticos):

Para el *potencial vectorial* \vec{A} ,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \exists \vec{A} \text{ tal que } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Para el *potencial escalar* ϕ ,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} \rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \rightarrow$$

$$\exists \phi \text{ tal que } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Los potenciales no tienen sentido físico, sólo matemático, pero son muy útiles para calcular los campos.

Ecuaciones:

Los potenciales escalar y vectorial verifican las siguientes ecuaciones de onda

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Cálculo:

Los potenciales no están unívocamente determinados. Las distintas formas de elegir los potenciales, dejando invariantes los campos, se llaman *transformaciones de contraste de los potenciales*. Suelen considerarse:

- *Contraste de Coulomb*: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$
- *Contraste de Lorentz*: $\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

Los métodos para resolver estas ecuaciones suelen ser:

- (1) Separación de variables
- (2) Teorema de Green (concretamente, la segunda identidad de Green), a veces combinado con las transformadas directa e inversa de Fourier

Un ejemplo del cálculo de estos potenciales $\phi(\vec{r}, t)$ y $\vec{A}(\vec{r}, t)$ es el de una partícula puntual aislada en movimiento arbitrario, para el que se obtienen los *potenciales de Liénard-Wiechert*.



10.7. Principio de superposición

Si en una región hay varios campos electromagnéticos distintos, en general se pueden sumar linealmente, es decir

$$\vec{E}_{total}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

$$\vec{D}_{total}(\vec{r}, t) = \vec{D}_1(\vec{r}, t) + \vec{D}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

$$\vec{H}_{total}(\vec{r}, t) = \vec{H}_1(\vec{r}, t) + \vec{H}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

y

$$\vec{B}_{total}(\vec{r}, t) = \vec{B}_1(\vec{r}, t) + \vec{B}_2(\vec{r}, t) + \dots$$

No obstante, para algunos medios materiales no se cumple el principio de superposición de los campos electromagnéticos macroscópicos. Esto se debe a que estos materiales presentan un comportamiento no lineal (aunque los campos originales sí cumplen el principio).



10.8. Leyes de conservación

10.8.1. Conservación de la carga

El principio de conservación de la carga se expresa matemáticamente en la *ecuación de continuidad (en forma integral)*

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv,$$

donde el término de la izquierda expresa la carga que sale del volumen V a través de la superficie S que lo delimita, mientras que el término de la derecha representa el ritmo de disminución de la carga total que hay en V .

Aplicándole el teorema de la divergencia (o de Gauss) al término de la izquierda, puede escribirse $\int_V \nabla \cdot \vec{J} \cdot dv = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv$, que ha de cumplirse para cualquier V , por lo que

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

ecuación de continuidad (en forma diferencial).

10.8.2. Conservación de la energía

Dado un volumen V , en el que hay fuentes de campo electromotor \vec{E}' , se tiene que

$$\int_V \vec{E}' \cdot \vec{J} dv = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv + \int_V \gamma^{-1} \vec{J}^2 dv + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{a}$$

$$= \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + \int_V \gamma^{-1} \vec{J}^2 dv + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a},$$

donde:

- $\int_V \vec{E}' \cdot \vec{J} dv$ expresa la energía por segundo (potencia) que suministran las fuentes contenidas en V
- $\frac{d}{dt}(W_e + W_m)$ representa la variación de la suma de la energía del campo eléctrico $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dv$ y la del campo magnético $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dv$
- $\int_V \gamma^{-1} \vec{J}^2 dv$ es la energía disipada irreversiblemente debido al efecto Joule
- $\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{a}$ es el flujo de energía a través de la frontera, y $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es el *vector de Poynting*, que contiene información de la energía y del momento lineal del campo electromagnético

10.8.3. Conservación del momento lineal

Sea \vec{p} el momento lineal de las partículas por unidad de volumen, entonces se define el momento lineal total de las partículas como $\vec{P}_p = \int_V \vec{p} dv$. Sea $\vec{P}_c = \epsilon \mu \vec{E} \times \vec{H}$ la densidad de momento lineal, por unidad de volumen, que puede asociarse al campo electromagnético. El principio de conservación del momento lineal o impulso se expresa como

$$\vec{P}_p + \int_V \vec{P}_c dv = cte.$$

Nota: A un campo electromagnético también se le puede asociar momento angular respecto del origen $\vec{L}_c = \int_V (\vec{r} \times \vec{P}_c) dv$ y, por tanto, una densidad de momento angular $\vec{l}_c = \vec{r} \times \vec{P}_c$.



10.9. Movimiento en un campo electromagnético

Cuando una partícula de carga q se desplaza por una región en que hay un campo magnético \vec{H} cuyo vector inducción magnética es \vec{B} , experimenta una fuerza $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$. Como en esa región suele haber también campo eléctrico \vec{E} , la fuerza total es la *fuerza de Lorentz*:

$$\vec{F}^{(q)} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Si la partícula es tal que crea un campo magnético despreciable comparado con el que hay en la región (es decir, se puede considerar una partícula de prueba), y si tiene masa m (existen partículas que tienen carga pero no masa), se cumple que

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} + \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}.$$



10.10. Campos electrostático y magnetostático

Ante condiciones de estacionariedad, desaparece la dependencia del tiempo y quedan

$$\begin{cases} \nabla_x \vec{E} = \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla_x \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

y, para los potenciales,

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$



A. Apéndice

A.1. Notación en el Cálculo Diferencial

El lector interesado en las notaciones más frecuentes que se suelen utilizar para las derivadas y los diferenciales clásicos, puede consultar <http://www.Casado-D.org/edu/NotacionesCalculoDiferencial.pdf>



Universidad Complutense de Madrid

└ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

└ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II

└ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012