



Repaso no del todo elemental de Matemáticas elementales

Algunos de mis alumnos de la Licenciatura en Documentación y yo necesitábamos repasar nuestras matemáticas. Hacía mucho que no las utilizábamos. Así que les propuse que buscásemos información. Dicho y hecho: al día siguiente madrugaron para buscarla. Después pensamos que quizá podía haber alguien por ahí que, como nosotros, necesitase repasar un poquillo. Así que hemos hecho este documento a partir de su información y otra que he puesto yo.

Índice

Conjuntos de números

Álgebra

Propiedades teóricas de las operaciones

- Propiedades conmutativa y asociativa

- Propiedad distributiva y sacar factor común

- Operaciones con los signos

Operaciones con números

- Operaciones con fracciones

- Operaciones con potencias

- Operaciones con raíces

Operaciones en ecuaciones

- Despejar en una ecuación

- Utilizar un ecuación en otra

Operaciones en inecuaciones o desigualdades

- Sumar o restar una cantidad

- Multiplicar o dividir por una cantidad

- Despejar en una inecuación

- Utilizar una inecuación en otra

Algunas expresiones útiles

- Cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia y suma por diferencia

Geometría

- Ejes cartesianos, puntos y vectores

- Ecuaciones de la recta

Apéndice

- Despejar en ecuaciones de otros tipos

- Enlaces

Conjuntos de números

Recordamos los distintos tipos de números:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (Números naturales)

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ (Números enteros)

$\mathbb{Q} = \{1/1, -1/2, 2/1, -3/1, 2/2, 1/3, \dots\}$ (Números racionales)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ \pi, \sqrt{2}, e, \dots \}$ (Números irracionales)

$\mathbb{R} = \{3, -4/8, -1024, \pi, \dots\}$ (Números reales)

$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid \text{con } a \text{ y } b \text{ números reales e } i \text{ un número tal que } i^2 = -1 \}$ (Números complejos).

Algunos grupos están contenidos en otros. En concreto: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, porque se cumple que $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Como curiosidad, y aunque no se suele hablar de ellos, existe otro tipo de números: los *cuaternios*. Estos números surgieron en un intento de generalizar los números reales en la misma dirección de ideas y propiedades –mismas estructuras y propiedades matemáticas– que los anteriores conjuntos de números. El Teorema de Frobenius demuestra que las únicas extensiones posibles de los números reales son los números complejos y los cuaternios. Hubo que renunciar a la propiedad conmutativa: el resultado de multiplicar dos números es independiente del orden en que se operen en el conjunto de los números complejos pero no es así en el de los cuaternios. Esta renuncia a la conmutatividad tiene como consecuencia que no se pueda construir un análisis matemático basado en los cuaternios, cosa que sí sucede con los números complejos, lo que hace a éstos mucho más útiles. Entre las limitadas aplicaciones de los cuaternios está la de describir bien las rotaciones en los espacios euclídeos de tres y cuatro dimensiones.

Los cuaternios se construyen añadiendo a los números reales no una parte imaginaria, como en el caso de los números complejos, sino tres, y definiendo su suma y su producto.

$\mathbb{K}^4 = \{ a + ib + jc + kd \mid \text{con } a, b, c \text{ y } d \text{ números reales e } i, j \text{ y } k \text{ números tales que } i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ y además } ij = -ji = k, jk = -kj = i \text{ y } ki = -ik = j \}$ (Cuaternios)

Nota histórica sobre los números irracionales

El descubrimiento de los números irracionales marca un hito en la historia de las Matemáticas, y causó su primera gran crisis. Fue sorprendente y extremadamente molesto para los pitagóricos, ya que echaba por tierra toda su filosofía, en la que todo se basaba en los números enteros. Además, esto dejaba sin valor todas sus demostraciones geométricas de proporción, que se basaban en que todos los segmentos son conmensurables.

Tan grande fue el escándalo que quisieron mantenerlo en secreto. Se dice que el pitagórico Hipaso fue arrojado al mar por desvelarlo. Otra versión afirma que fue apartado de la comunidad pitagórica y que se le erigió una tumba como si hubiera muerto. Aún hay una versión más, que dice que quien descubrió el número $\sqrt{2}$ (parece ser que el primer irracional encontrado, longitud de la diagonal del cuadrado de lado uno) murió en un naufragio y esto fue interpretado como un castigo, puesto que lo «inexpresable» debía quedar oculto...

Los pitagóricos demostraron que a la diagonal del cuadrado unidad no le corresponde ningún número racional. Por esta razón a estos números se les llamó *irracionales*. La más sencilla y conocida demostración, por reducción al absurdo, que conocemos de que la raíz de dos no es racional, ya aparecía en un libro de Aristóteles.



Álgebra

Propiedades teóricas de las operaciones

Las siguientes propiedades son válidas para cualquiera de los tipos de números mencionados en [Conjuntos de números](#) salvo los cuaternios, de los que no se trata en este documento.

Propiedad conmutativa

Esta propiedad dice que al operar dos números el orden en que se haga es indiferente, pueden conmutarse sin que cambie el resultado; por ejemplo, para la suma

$$a + b = b + a$$

y para la multiplicación

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Propiedad asociativa

Sólo podemos operar los números de dos en dos. Cuando hay más de dos, en realidad lo que hacemos es operar dos, luego el resultado con un tercer número, este resultado con un cuarto, etcétera. Esta propiedad permite agruparlos de distinta forma sin que el resultado varíe. Para la suma

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

y para el producto

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Propiedad distributiva

Esta propiedad involucra dos operaciones. Por ejemplo, para la suma y el producto

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

y

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Sacar factor común

Sobre la propiedad anterior es importante insistir en el hecho de que, dado que las igualdades se pueden interpretar/leer en ambos sentidos, también de derecha a izquierda, dando la vuelta a las fórmulas anteriores,

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

y

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$$

Operaciones con los signos

Recordemos algunas operaciones que se pueden hacer con los signos. Con la suma,

$$a + b = a - (-b)$$

y

$$-a - b = -(a + b)$$

Con el producto

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

$$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$$

$$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$$

y

$$-(-a) = a$$



Operaciones con números

Operaciones con fracciones

Definiciones

Los *números fraccionarios* se utilizan para designar las partes en que se puede dividir la unidad. Las *fracciones* son las expresiones de los números fraccionarios como cociente de dos números enteros. Los números fraccionarios tiene también una *expresión decimal*, que puede tener un número finito o periódico de decimales (los números que tienen infinitos decimales no periódicos, es decir, sin patrones de repetición, son los números irracionales).

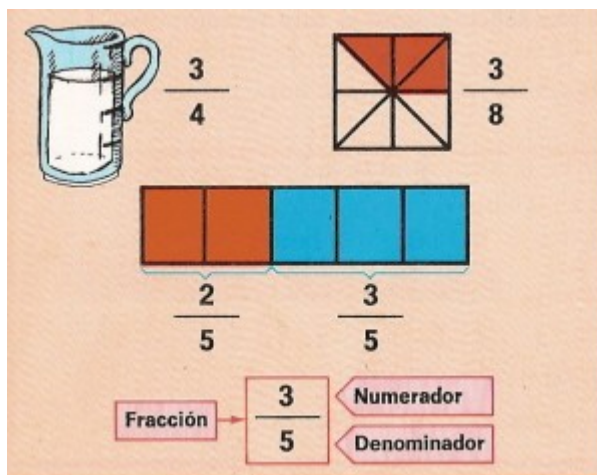
Los números enteros también se puede expresar en forma de cociente de fracciones: basta tomar un 1 en el denominador de la fracción, como se muestra en los ejemplos de más abajo.

Los *números mixtos* son números racionales que tienen parte entera, porque su módulo es mayor que la unidad, y parte decimal.

Los *números racionales* incluyen a los conjuntos anteriores, es decir, a los fraccionarios, los enteros y los mixtos.

Ejemplos: $\frac{5}{34}$, $-\frac{4}{7}$, $\frac{5}{1}=5$, $\frac{8}{3}=\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=2+\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}=1,25$, $\frac{1}{3}=0,3333\cdots=0,\bar{3}$,

$$\frac{376}{300} = \frac{375}{300} + \frac{1}{300} = \frac{5}{4} + \frac{1}{300} = 1,25 + 0,00333\cdots = 1,25 + 0,00333\cdots = 1,25333\cdots = 1,25\bar{3}$$



<http://www.aplicaciones.info/decimales/fraccion.htm>

Signo

Conviene recordar que en un cociente el signo se puede poner delante, en el numerador o en el denominador.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Ejemplo: $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$

Equivalencia

Como dos fracciones distintas pueden representar la misma parte de la unidad, se llamarán *números racionales equivalentes* a los que, al ser reducidos, dan lugar al mismo cociente irreducible. La operación de *reducir* un número es simplificar al máximo los factores comunes del numerador y del denominador.

Ejemplo: $\frac{6}{9} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{2}{3}$, $\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Suma y resta de números racionales

Para sumar y restar números racionales es necesario expresarlos, si no lo están, en formas equivalentes con el mismo denominador: esto hace que los numeradores «estén en la misma escala» y, por tanto, sean comparables. Para hacer esta operación de forma elegante y obtener ya la fracción más reducida posible del resultado, se estudiaba en la educación primaria un método basado en el concepto de *mínimo común múltiplo*.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot mcm(b, d)}{b \cdot mcm(b, d)} + \frac{c \cdot mcm(b, d)}{d \cdot mcm(b, d)} = \frac{a \cdot \frac{mcm(b, d)}{b} + c \cdot \frac{mcm(b, d)}{d}}{mcm(b, d)}$$

Sin embargo, antes que la elegancia debe estar el saber hacer las cosas, por lo que en mi opinión personal es conveniente conocer también el método siguiente (no lo he visto escrito en ningún sitio, es posible que por obvio; pero yo a veces lo utilizo), por si se nos olvidase la definición del mínimo común múltiplo o, más importante, para comprender mejor lo que se está haciendo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Es decir, se multiplica a cada fracción en el numerador y el denominador por el denominador de la otra fracción. Así nos aseguramos que tienen denominador común, por lo que ya podemos sumarlas o restarlas. Después ya nos encargaremos de reducirla.

Un ejemplo:

Con el mínimo común múltiplo:

$$\frac{2}{6} + \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 5 + 7 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{31}{30}$$

Cuando se nos ha olvidado la definición del mínimo común múltiplo:

$$\frac{2}{6} + \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 10}{6 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 6} = \frac{20 + 42}{60} = \frac{62}{60} = \frac{31}{30}$$

Otros ejemplos: $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$, $\frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = \frac{-1}{2}$

Multiplicación de números racionales

El producto de los numeradores será el nuevo numerador; el producto de los denominadores será el nuevo denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} \cdot (-5) = \frac{2}{3} \cdot \frac{(-5)}{1} = \frac{2 \cdot (-5)}{3 \cdot 1} = \frac{-10}{3}$

División de números racionales

Un poco más complicada es la división de números racionales. Si las fracciones están escritas una tras otra, se multiplican en cruz; si están una encima de otra, se multiplican los valores externos para formar el denominador y los internos para formar el numerador.

Ejemplos: $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}$, $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 2}$, $\frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2}$



Operaciones con potencias

Exponente cero

Por convenio (más abajo se ve por qué), para cualquier número a ,

$$a^0 = 1$$

Exponente uno

Para cualquier número a ,

$$a^1 = a$$

Exponente natural

Para cualquier número a y cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$$

Exponente entero

En un cociente, se puede cambiar una potencia del numerador al denominador, o viceversa, cambiando el signo de su exponente

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Exponente racional

Las potencias de exponente racional tienen una representación equivalente en forma de raíz. Para comprender esta definición es mejor pensar en la notación radical, pero para hacer operaciones es más cómodo esta notación potencial. Se tiene que

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Por tanto, $a^{1/n}$ se puede definir como el número tal que

$$a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdots a^{1/n} = a$$

Otros exponentes

Según las clases de números que se han mencionado en el apartado [Conjuntos de números](#), todavía faltaría por determinar qué se entiende por una potencia cuyo exponente es de tipo irracional, real, complejo y cuaternio.

Sobre la respuesta a esta cuestión no trivial, vamos a mencionar informalmente que como los números racionales «están por todos los lados» (son *densos*) entre los números irracionales y los reales, es posible *extender* de forma única la función continua a^x a este tipo de exponentes (esta función debe ser continua porque la cantidad $a^x - a^{x+h} = a^x \cdot (1 - a^h)$ es pequeña para x fijo y h

pequeño). Es decir, como dado un número irracional o real es posible encontrar un número racional tan cercano a él como se desee, los valores que toma la potenciación en los racionales determinan el valor que debe tomar la potenciación para este otro tipo de números.

Finalmente, para los exponentes complejos (y me imagino que para los cuaternios) la potenciación quedaría determinada por definirse estos números en términos de los reales.

Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base, se suman los exponentes:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplos: $3^2 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$, $3^9 \cdot 3^{-2} = 3^{9-2} = 3^7$, $3^{\frac{3}{5}} \cdot 3 = 3^{\frac{3}{5}+1} = 3^{\frac{8}{5}}$

Cociente de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base, se restan los exponentes:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$$

Ejemplos: $\frac{3^2}{3^3} = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $\frac{3^{3/5}}{3} = 3^{3/5-1} = 3^{-2/5}$

Potencia de una potencia

Se cumple que

$$(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdots a^n = a^{n+n \cdots n} = a^{n \cdot m}$$

Ejemplos: $(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$, $(\sqrt[3]{5^2})^7 = (5^{2/3})^7 = 5^{14/3} = 5^{4 + \frac{2}{3}} = 5^4 \cdot 5^{2/3} = 5^4 \cdot \sqrt[3]{5^2}$

Reglas mnemotécnicas y coherencia

Como muestra de la coherencia de todo el sistema de definiciones y operaciones anteriores, y sobre todo para recordarlas sin necesidad de aprenderlas de memoria,

$$a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0 \rightarrow a^0 = 1$$

$$a^n = a^{n-1+1} = a^{n-1} \cdot a^1 \rightarrow a^1 = a$$

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = (a^{1/n})^n \rightarrow a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Potencia de un producto

La propiedad distributiva para el caso de las operaciones de producto y potenciación, es

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b) = (a \cdot a \cdots a) \cdot (b \cdot b \cdots b) = a^n \cdot b^n$$

Ejemplos: $(3 \cdot 2)^5 = 3^5 \cdot 2^5$, $\sqrt[3]{(3 \cdot 2)^2} = (3 \cdot 2)^{2/3} = 3^{2/3} \cdot 2^{2/3} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$

Potencia de un cociente

La propiedad distributiva para el caso de las operaciones de división y potenciación, es

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos: $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5}$, $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \frac{3^{2/3}}{2^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$



Operaciones con raíces

Las raíces son potencias de exponente fraccionario, y viceversa: se puede decir que son dos expresiones distintas del mismo número. Ya se han visto algunas operaciones en el apartado [Operaciones con potencias](#).

Raíz n -ésima de un número

El número b es raíz n -ésima del número a si

$$b^n = a$$

y se escribe

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplos: El número -3 es la raíz cuadrada de 9 porque $(-3)^2 = 9$. El número 2 es la raíz cúbica de 8 porque $2^3 = 8$.

No unicidad de la raíz

Un número a puede tener más de una raíz n -ésima; no tiene por qué ser única. El número de raíces n -ésimas depende del conjunto de números (ver el apartado [Conjuntos de números](#)) con que se esté trabajando. Si se está trabajando en \mathbb{C} , uno de los conjuntos más generales, el *Teorema Fundamental del Álgebra* afirma que un número tiene siempre n raíces n -ésimas. Sin embargo, como normalmente se trabaja en el conjunto \mathbb{R} , que está contenido en \mathbb{C} , no siempre hay tantas raíces. Por ejemplo,

- Las raíces cuadradas de $+4$ son como mucho dos, y las dos están en \mathbb{R} : son -2 y $+2$
- Las raíces cúbicas de -8 son como mucho tres, pero en \mathbb{R} sólo está -2 , las otras dos raíces están en \mathbb{C} y por tanto es como si no existiesen cuando se trabaja en conjuntos de números

menos generales que \mathbb{R} : en este caso, -8 tiene sólo esa raíz cuando se considera \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ó \mathbb{R}

→ Las raíces cuartas de $+1$ son -1 y $+1$ en \mathbb{R} , pero en \mathbb{C} deben ser cuatro: $+1$, $+i$, -1 y $-i$

Notación en forma de potencia

El número b es raíz n -ésima del número a si

$$b^n = a$$

o, con la siguiente notación, que a veces es más cómoda para operar,

$$(b^n)^{1/n} = a^{1/n} \rightarrow b = a^{1/n}$$

Operaciones con raíces

Cuando tenemos una suma o resta de raíces, en general no se puede hacer ninguna de las operaciones que se han visto hasta ahora. En ocasiones se pueden hacer otras, como sacar factor común, por ejemplo; pero no se van a ver ahora.

Para el producto y cociente de raíces, es conveniente pasar a la notación en forma de potencias y hacer los cálculos como ya se ha visto. También es conveniente esta notación, cuando no se tiene práctica, para sacar algunos factores de dentro afuera de la raíz.

Ejemplos: $\sqrt[3]{5} \sqrt{10} = 5^{1/3} \cdot (2 \cdot 5)^{1/2} = 5^{1/3+1/2} \cdot 2^{1/2} = 5^{5/6} \cdot 2^{1/2} = \sqrt[6]{5^5} \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot 5} = (2^3 \cdot 2 \cdot 5)^{1/3} = 2 \sqrt[3]{10}$

Raíz cuadrada

Dada la frecuencia con que se utiliza, es interesante hablar más de esta raíz. Por el *Teorema fundamental del álgebra*, siempre existen dos raíces en \mathbb{C} , pero sólo las vamos a tener en cuenta cuando ambas estén en \mathbb{R} . Por tanto, para nosotros, un número positivo tiene dos raíces, mientras que la raíz de un número negativo no va a tener sentido.

Ejemplos: El número $+4$ tiene las dos raíces cuadradas $\pm\sqrt{4} = \pm 2$, porque $(-2)^2 = +4$ y $(+2)^2 = +4$. El número -4 no tiene raíces, porque el signo negativo no se obtiene al elevar ningún número al cuadrado.

Raíz cúbica

Dada la frecuencia con que se utiliza también esta raíz, diremos que de nuevo por el *Teorema fundamental del álgebra*, siempre existen tres raíces en \mathbb{C} , pero sólo una en \mathbb{R} . Ésta es la que vamos a tener en cuenta. Por tanto, para nosotros, un número positivo o negativo (ahora el signo no es un problema) tiene siempre una raíz cúbica (aunque a veces no sea una cantidad, en módulo, «redonda»).

Ejemplos: El número $+8$ tiene a $+2$ como raíz cúbica $\sqrt[3]{+8} = +2$, porque $(+2)^3 = +8$. El número -8 tiene como raíz $\sqrt[3]{-8} = -2$, porque $(-2)^3 = -8$. En el caso de la raíz cúbica se puede pensar que el signo «sale» de la raíz; el motivo real es que, para el producto de tres números negativos: $(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = [(-a) \cdot (-a)] \cdot (-a) = +a^2 \cdot (-a) = -a^3$.



Operaciones en ecuaciones

Despejar en una ecuación

Aunque las ecuaciones pueden tener varias finalidades, como expresar una relación, definir o determinar un conjunto de números, describir el comportamiento de un sistema, etcétera, la finalidad principal y última suele ser despejar la incógnita (o incógnitas), que según el tipo de ecuación puede ser un número, una matriz, una función, etcétera.

Al nivel más básico se suele trabajar con ecuaciones de una variable numérica, que son los que se trabajarán aquí mediante ejemplos. Sin embargo, estos ejemplos se van a desarrollar de una forma más general y potente que la usual, que es una simplificación de aquélla. Esta simplificación, en mi opinión, es mínima comparada con la potencia de pensamiento que se pierde al aplicarla; es decir, creo que no compensa. Tanto en el apartado siguiente [Operaciones en desigualdades](#) como en el del apéndice [Despejar en ecuaciones de otros tipos](#) se ve el beneficio de la forma de pensar general; que es, además, la correcta y pura dentro de las Matemáticas.

Esquema general para despejar

Las ideas principales de esta forma de pensar son:

- (a) Hay una serie de operaciones que actúan sobre la incógnita. El orden en que actúan estas operaciones está determinado tanto por la propia jerarquía que hay definida matemáticamente entre las operaciones como por la sintaxis de la ecuación (paréntesis, corchetes, llaves, etcétera).
- (b) Cada una de estas operaciones tiene una operación inversa que la cancela o compensa: la resta y la suma, la división y la multiplicación, la radicación y la potenciación, etcétera. (Estos pares de operaciones están relacionados con lo que se llama *elemento opuesto*).
- (c) Si dos cantidades son iguales, los resultados de aplicarles una misma operación también lo son.

Estos dos puntos determinan la forma general de proceder a la hora de despejar, cuyas reglas son:

- (1) Para dejar la incógnita sola (descubrir su valor) vamos a ir cancelando/compensando las operaciones que actúan sobre ella. El orden en que tenemos que ir haciendo esto es el inverso al de (a); es decir, vamos a operar de fuera adentro, de las operaciones más alejadas a las más cercanas.
- (2) Para hacer esa cancelación o compensación de operaciones, vamos a aplicar la operación inversa a la que haya en la ecuación.

El esquema anterior se comprende mejor con ejemplos, veamos algunos.

Ecuación de primer grado o lineal

Imaginemos que queremos despejar la x de la ecuación numérica siguiente

$$ax + b = 0$$

La forma de pensar deber ser: como los dos miembros de la igualdad son iguales, si les restamos a ambos la misma cantidad debe obtenerse otra igualdad.

$$ax + b - b = -b$$

$$ax + 0 = -b$$

$$ax = -b$$

Y así, con la resta, opuesta a la suma, hemos cancelado ese término que sumaba, que era el más externo. Ahora quitamos el factor que multiplica a la incógnita con una división, puesto que si dos cantidades son iguales, lo siguen siendo al aplicarles la misma operación.

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b)$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Los pasos que se han hecho hasta aquí no son sino los clásicos pasos «como b está sumando, para restando al otro miembro» y «como a está multiplicando, para dividiendo». Sin embargo, como se ha mencionado antes, se han explicado aquí de una forma más general y potente. Luego, con la práctica, no es necesario escribirlos con tanto detalle.

Ecuación de segundo grado o cuadrática

Ahora queremos despejar la x de la ecuación numérica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quitamos el término que no involucra a la incógnita (el término *independiente*):

$$ax^2 + bx + c - c = -c$$

$$ax^2 + bx = -c$$

Ahora aparece un problema grande, puesto que no se puede sacar factor común el x^2 . Pero, si nos acordamos de las expresiones algebraicas del apartado [Algunas expresiones útiles](#) podemos hacer lo siguiente:

$$(\sqrt{a}x)^2 + 2\sqrt{a}\frac{b}{2\sqrt{a}}x = -c$$

$$(\sqrt{a}x)^2 + 2\sqrt{a}\frac{b}{2\sqrt{a}}x + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

Estas operaciones anteriores, proceso llamado *completar cuadrados*, tenían como único objetivo hacer que el miembro izquierdo de la igualdad sea un cuadrado perfecto, es decir, como

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = (\sqrt{a}x)^2 + 2\sqrt{a}\frac{b}{2\sqrt{a}}x + \left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

la ecuación se convierte en

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a}$$

de donde (nótese que al tomar raíz aparecen dos signos, porque al elevar al cuadrado ambos dan lugar al signo positivo de la cantidad original)

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm \sqrt{-c + \frac{b^2}{4a}}$$

$$\sqrt{a}x = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

$$\sqrt{a}x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

Y, finalmente,

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{a}x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}\sqrt{a}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hemos obtenido la fórmula que nos da las dos soluciones de una ecuación de segundo grado. Dada la frecuencia con que se utiliza, a los estudiantes se les hace aprender de memoria; pero siempre sería posible hacer los pasos anteriores para cada ecuación concreta. Por otro lado, los pasos anteriores también sirven para «reinventar» o «reencontrar» la fórmula de nuevo, en caso de que se nos olvide.



Utilizar una ecuación en otra

Frecuentemente en Matemáticas es necesario utilizar unas ecuaciones dentro de otras: para resolver sistemas de ecuaciones, hacer desaparecer ciertos términos, sustituir recursivamente, en demostraciones, etcétera.

Propiedad transitiva

Si tenemos dos ecuaciones, se puede utilizar una en otra mediante la *propiedad transitiva*:

$$\begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases} \rightarrow a=b=c \rightarrow a=c$$

Suma de ecuaciones

Si tenemos dos ecuaciones, se pueden «sumar» para dar lugar a una tercera igualdad:

$$\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \rightarrow a+c=b+d$$

El razonamiento que se ha seguido en esta operación es que: si b es igual a a y d es igual a c , entonces la suma de dos valores siempre será igual que la suma de los otros dos. Como vemos, lo que se suma son los miembros de las ecuaciones, no las ecuaciones propiamente dichas.

Sistemas de ecuaciones

Hay varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones, y a veces elegir uno u otro viene sugerido por el propio sistema o, si no es así, es una cuestión de elección personal. A veces es suficiente «meter» una ecuación en otra:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+3y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ (x+2y)+y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ 3+y=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$



Operaciones en inecuaciones o desigualdades

Como su nombre indica (a veces se utiliza también *inecuaciones*), son expresiones que, a diferencia de las ecuaciones, que expresan igualdades, involucran signos de menor, menor o igual, mayor, o mayor o igual. Operar con ellas es un poco más complicado que con las ecuaciones, donde fácilmente hacemos operaciones:

- Si dos miembros son iguales, cuando les sumamos o restamos una misma cantidad, siguen siendo iguales.
- Si dos miembros son iguales, cuando les multiplicamos o dividimos por una misma cantidad, siguen siendo iguales.

Como hemos visto en el apartado [Operaciones con ecuaciones](#), esto es en el fondo lo que llamamos «pasar los factores de un lado para otro» en una ecuación sumando o dividiendo: no cambian realmente de lugar, sino que desaparecen porque aplicamos una misma operación a ambos miembros de la igualdad.

Con las inecuaciones hay que razonar igual, no aprenderse nada de memoria; ahora tendremos las reglas siguientes.

Sumar y restar una cantidad

Si un miembro es menor o igual que otro, cuando les sumamos o restamos una misma cantidad, el que era menor o igual sigue siéndolo:

$$a \leq b \rightarrow a+c \leq b+c \quad \text{y} \quad a-c \leq b-c$$

Multiplicar y dividir por una cantidad

Si un miembro es menor o igual que otro, cuando le multiplicamos o dividimos por una cantidad positiva ($c > 0$), como no se cambia el signo de los miembros, el que era menor o igual sigue siéndolo:

$$a \leq b \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

Sin embargo, si un miembro es menor o igual que otro, cuando le multiplicamos o dividimos por una cantidad negativa ($c < 0$), como sí se cambia el signo de los miembros, el que era menor o igual pasa a ser ahora mayor o igual (ver la figura); es decir, hay que cambiar el sentido de la desigualdad.

$$a \leq b \rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

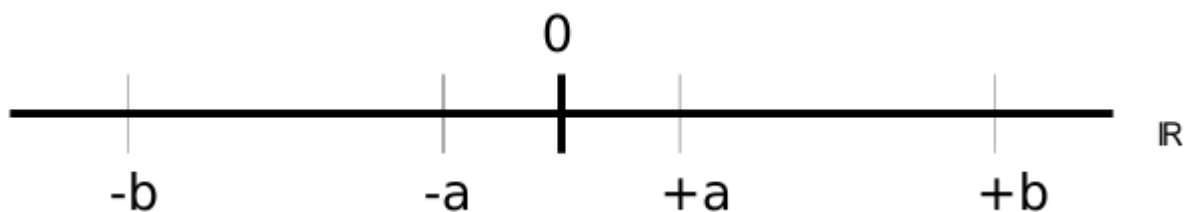


Figura: Un cambio de signo equivale a una reflexión respecto al origen

Despejar en una inecuación

Las inecuaciones también pueden tener varias finalidades, como las ecuaciones. Pero también, como para las ecuaciones, la finalidad principal y última suele ser despejar la incógnita o incógnitas. Como hicimos para las ecuaciones numéricas, en vez de utilizar las frases «esto que está sumando/restando pasa restando/sumando» y «esto que está multiplicando/dividiendo pasa dividiendo/multiplicando», vamos a pensar para despejar.

Inecuación de primer grado o lineal

Imaginemos que queremos despejar la x de la inecuación numérica siguiente

$$ax + b \leq 0$$

La forma de pensar deber ser: como el miembro de la izquierda es menor o igual que el de la derecha, si les restamos a ambos la misma cantidad debe conservarse ese orden.

$$ax + b - b \leq -b$$

$$ax + 0 \leq -b$$

$$ax \leq -b$$

Y así, con la resta, opuesta a la suma, hemos cancelado ese término que sumaba, que era el más externo. Ahora quitamos el factor que multiplica a la incógnita con una división, teniendo cuidado de cambiar el sentido de la desigualdad cuando cambia el signo de sus dos miembros. Consideramos los dos casos:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \cdot ax \leq \frac{1}{a} \cdot (-b) & \text{si } a \geq 0 \\ \frac{1}{a} \cdot ax \geq \frac{1}{a} \cdot (-b) & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{-b}{a} & \text{si } a \geq 0 \\ x \geq \frac{-b}{a} & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Utilizar una inecuación en otra

Como con las ecuaciones, también es frecuente en Matemáticas utilizar unas inecuaciones dentro de otras: para acotar cantidades, deducir propiedades de las funciones, en demostraciones, etcétera.

Propiedad transitiva

Si tenemos dos inecuaciones, se puede utilizar una en otra mediante la *propiedad transitiva*:

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \rightarrow a \leq b \leq c \rightarrow a \leq c$$

Suma de inecuaciones

Si tenemos dos inecuaciones, se pueden «sumar» para dar lugar a una tercera desigualdad:

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \rightarrow a + c \leq b + d$$

El razonamiento que se ha seguido en esta operación es que: si b es mayor o igual que a y d es mayor que c , entonces la suma de los dos valores mayores (o iguales) siempre será mayor o igual que la suma de los dos menores (o iguales). Como en el caso de las ecuaciones, lo que se suma son los miembros de las inecuaciones, no las inecuaciones mismas.

Sistemas de inecuaciones

Como para las ecuaciones, hay sistemas de inecuaciones en los que, para resolverlos, se puede «meter» una inecuación en otras. No se van a tratar aquí.



Algunas expresiones útiles

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb=a^2+2ab+b^2$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Suma por diferencia

$$(a+b)(a-b)=aa-ab+ba-bb=a^2-b^2$$



Geometría

Ejes cartesianos, puntos y vectores

Sistema de referencia cartesiano

Un *sistema de referencia cartesiano* está formado, en el caso del plano, por dos *ejes* perpendiculares; uno horizontal, el *eje de abscisas*, y otro vertical, el *eje de ordenadas*. El punto donde se intersecan los ejes es el *origen* del sistema de referencia. Los ejes dividen al plano en cuatro *cuadrantes*.

Puntos

Un punto se representa analíticamente por un par de valores, que son sus *coordenadas*:

$$P=(x, y)$$

La primera coordenada se llama *abscisa* y la segunda *ordenada*. Las coordenadas son *números* con *signo*. Indican la posición del punto respecto al origen; informalmente son, respectivamente, el número de posiciones que hay que moverse en horizontal y en vertical para ir del origen al punto. Las coordenadas tienen *signo*: la abscisa lleva signo positivo a la derecha del origen y negativo a la izquierda, mientras que para la ordenada es positivo por encima del origen y negativo por debajo.

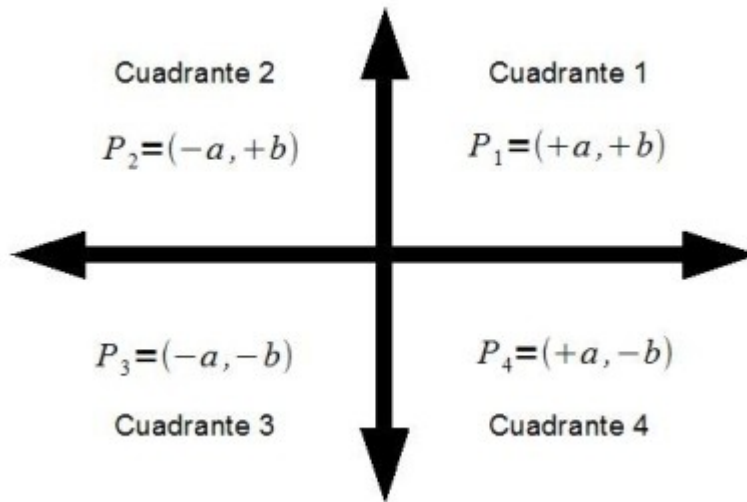


Figura: Los cuatro cuadrantes y un punto en cada uno de ellos

Vectores

En el mismo sistema de referencia pueden representarse vectores, que son flechas que indican una dirección, un sentido y una intensidad (tamaño). Los vectores están dados analíticamente por un par de valores, que son sus *componentes*:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Informalmente se puede pensar que los vectores indican movimientos en el plano. Las componentes son *números* con *signo*. Los números serían el número de movimientos que hay que hacer; el signo positivo indica en la primera componente que el movimiento es hacia la derecha y el negativo que es hacia la izquierda, mientras que en la segunda componente el signo positivo significa hacia arriba y el negativo hacia abajo. Estas direcciones y sentidos de los vectores son independientes de dónde esté situado el vector en el plano. Un vector se dice *libre* cuando no están determinados ni su punto de partida ni su punto de llegada; estos vectores se pueden, por tanto, dibujar donde queramos, porque sólo representan el movimiento.

En el conjunto que forman los vectores es posible definir algunas operaciones. Aquí vamos a ver la *suma de vectores* y el *producto de un vector por un escalar* (un número):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (v_x, v_y) \\ \vec{w} &= (w_x, w_y) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda \cdot \vec{v} &= (\lambda \cdot v_x, \lambda \cdot v_y) \\ \vec{v} + \vec{w} &= (v_x + w_x, v_y + w_y) \end{aligned}$$

Geométricamente, la suma de vectores se puede hacer como se indica en la figura: poniendo uno a continuación del otro. Del mismo modo se puede representar la operación de multiplicar un vector por un escalar, que no es más que sumar tantos vectores iguales a sí mismo como indique el escalar.

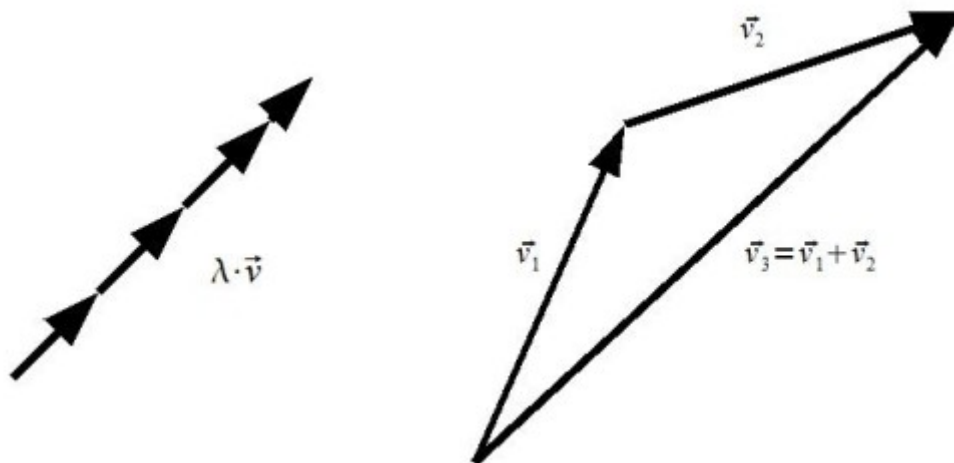


Figura: Escalar por un vector (izquierda) y suma de vectores (derecha)

Relación entre puntos y vectores

Los puntos y los vectores «conviven» en el sistema de referencia cartesiano. La relación básica entre ellos es que dados dos puntos podemos construir el vector que va de uno a otro sin más que restar las coordenadas del punto de llegada menos las del de partida. Este vector indica los movimientos que hay que hacer para ir de un punto a otro. Cuando el punto de partida es el origen, como no se resta nada, las coordenadas del punto de llegada coinciden con las componentes del vector.

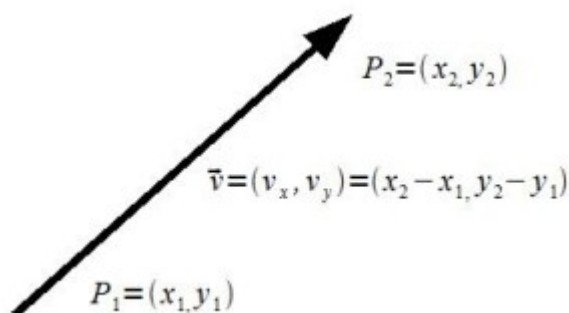


Figura: El vector que va de P_1 a P_2 se construye restando las coordenadas



Ecuaciones de la recta

Una *recta* es un subconjunto de puntos que verifican la condición de estar alineados. Si dice que tiene dimensión uno porque por ella podemos «movernos» en una única *dirección* (aunque sea en dos *sentidos*). Esto matemáticamente se debe a que esa dirección queda determinada por un único vector: su *vector director*. Una recta es un *espacio vectorial* de dimensión uno.

Por el mismo motivo, en un *plano* podemos «movernos» en dos direcciones (ancho y largo), queda determinado por dos vectores y es un espacio vectorial de dimensión dos. El *espacio* permite el movimiento en tres direcciones (ancho, largo y alto), queda determinado por tres vectores y es un espacio vectorial de dimensión tres. Y así sucesivamente, con los espacios de dimensión general n .

En el espacio podemos imaginarnos infinitos planos, y en cada plano podemos imaginarnos infinitas rectas. Ahora se va a considerar sólo el plano cartesiano, que puede verse como un subconjunto del espacio cartesiano en el que una dimensión es nula (la altura). En él podemos imaginarnos infinitas rectas.

Ecuaciones de la recta en el plano

Quizá la mejor forma de deducir todas las ecuaciones de la recta en el plano es ir obteniendo unas de otras, empezando por una forma fácil de recordar.

Ecuación vectorial

Empecemos con un dibujo, que es casi imposible de olvidar

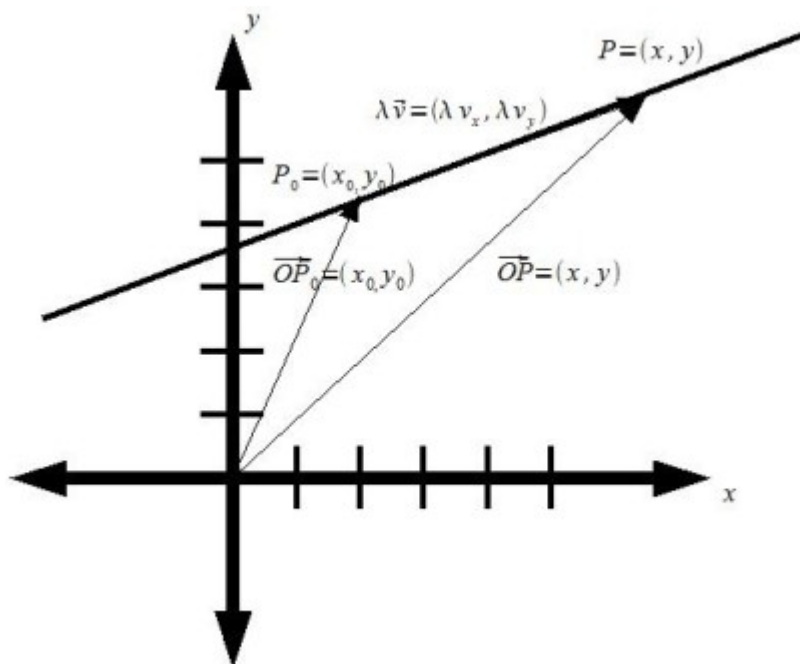


Figura: Relación vectorial que muestra que los puntos de la recta se obtienen según el parámetro λ va tomando valores

La interpretación de este dibujo es que para ir desde el origen al punto P es necesario ir primero del origen a P_0 y luego avanzar λ veces el vector \vec{v} . Según vamos variando los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se van generando todos los puntos de la recta. Esto matemáticamente se escribe en la *ecuación vectorial* siguiente:

$$\vec{OP}_0 + \lambda \vec{v} = \vec{OP}$$

En la ecuación anterior, que expresa que la suma de dos vectores es igual a un tercer vector, todo son vectores excepto el parámetro λ .

Ecuaciones paramétricas

Si en la ecuación vectorial escribimos explícitamente las componentes de los vectores, obtenemos

$$(x_0, y_0) + \lambda (v_x, v_y) = (x, y)$$

que, aplicando las operaciones de los vectores, se convierte en

$$(x_0, y_0) + (\lambda v_x, \lambda v_y) = (x, y)$$

$$(x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y) = (x, y)$$

y como dos vectores son iguales, por definición, sólo si lo son componente a componente, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, que se denominan *ecuaciones paramétricas* (por el parámetro λ):

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \end{cases}$$

Ecuación continua

Si despejamos el parámetro en las anteriores ecuaciones e igualamos, se obtiene la *ecuación continua*:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{v_x} = \lambda \\ \frac{y - y_0}{v_y} = \lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}}$$

Ecuación implícita

Si operamos en la anterior ecuación se obtiene la *ecuación implícita*:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \rightarrow (x - x_0) \cdot v_y = (y - y_0) \cdot v_x \rightarrow \boxed{x v_y - y v_x = x_0 v_y - y_0 v_x}$$

Ecuación explícita

Ahora, dejando sola la y se llega a la ecuación de la *ecuación explícita*:

$$x v_y - y v_x = x_0 v_y - y_0 v_x \rightarrow \boxed{y = \frac{v_y}{v_x} x + \frac{y_0 v_x - x_0 v_y}{v_x}}$$

Ecuación punto-pendiente

Finalmente, es posible obtener la *ecuación punto-pendiente* definiendo dos parámetros nuevos:

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + \frac{y_0 v_x - x_0 v_y}{v_x} \rightarrow \boxed{y = ax + b}$$

donde $a = \frac{v_y}{v_x}$ se llama *pendiente* de la recta y $b = \frac{y_0 v_x - x_0 v_y}{v_x}$ determina el *punto* $(0, b)$ donde la recta corta al eje cartesiano vertical.

Es interesante detenerse a interpretar los parámetros a y b .

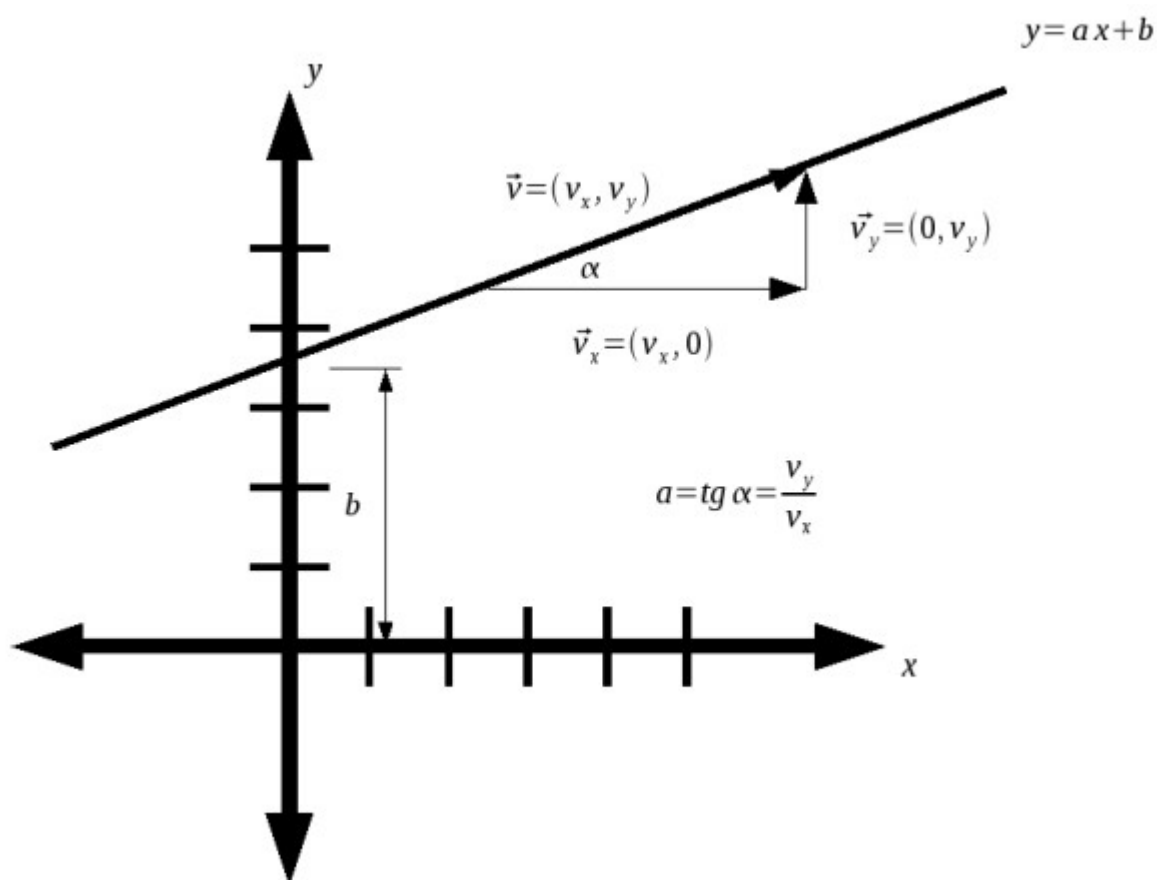


Figura: Ecuación punto-pendiente de la recta e interpretación de sus parámetros

Es decir, el parámetro a indica lo inclinada que está la recta (pendiente), por ser el cociente entre las componentes de cualquier vector contenido en ella; equivalentemente, es igual a la tangente del ángulo que la recta forma con el eje horizontal. Por otro lado, b es la altura a la que la recta corta al eje vertical, o, equivalentemente, el valor que toma la variable y para el valor $x = 0$.

Representación gráfica

En el fondo, una función matemática de la forma $y = f(x)$ no es más que dar una regla que «nos informa a la vez de infinitos pares de valores (x,y) ».

Para representar una función hay varias opciones, una sencilla es construir una tabla con una cantidad suficiente de estos pares de puntos, representarlos en un gráfico y unirlos suavemente (si la función es suave).

Para la recta, por tratarse de una ecuación lineal, dos puntos la determinan (como curiosidad: existen en Matemáticas otros tipos de geometrías no euclídeas en que por un punto pueden pasar más de una «recta»). Por tanto, lo más cómodo es dar dos valores a la x y obtener sus valores de y . Ahora ya se pueden representar los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , y unirlos finalmente con una regla. En teoría, si la ecuación de la recta está ya calculada, daría igual dónde coger los dos puntos, porque determinan igual el gráfico de la recta. Sin embargo, dado que en los dibujos a mano a veces marcamos aproximadamente los valores, el gráfico queda mejor tomando puntos parecidos a los de la muestra. Si se hace con ordenador, si no se tomasen puntos parecidos a los de la muestra sucedería que los puntos aparecerían ocupando una parte muy pequeña del gráfico, lo que haría al gráfico perder mucha utilidad y precisión. Es decir, en este caso se toman valores parecidos a los de la muestra por conveniencia.

Otras formas de representar la recta es a partir de las distintas formas que tienen las ecuaciones de la recta; dependiendo de cómo esté dada la información, se utilizará una u otra forma. De entre éstas, la más sencilla es la basada en la *ecuación punto-pendiente*.

Ecuaciones de la recta en el espacio

Si se ha comprendido el proceso anterior, tenemos la capacidad para generalizar los resultados y obtener sin apenas esfuerzo las ecuaciones de la recta en el espacio.

Ecuación vectorial

En este caso se podría hacer un dibujo equivalente al del plano en tres dimensiones. La interpretación de ese dibujo sería también que para ir al punto P es necesario ir primero del origen a P_0 y luego avanzar λ veces el vector \vec{v} . Según vamos variando los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se van generando todos los puntos de la recta. Esto matemáticamente se escribe en la *ecuación vectorial* siguiente:

$$\overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

En la ecuación anterior, que expresa que la suma de dos vectores es igual a un tercer vector, todo son vectores excepto el parámetro λ .

Ecuaciones paramétricas

Si en la ecuación vectorial escribimos explícitamente las componentes de los vectores, obtenemos

$$(x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_x, v_y, v_z) = (x, y, z)$$

que, aplicando las operaciones de los vectores, se convierte en

$$\begin{aligned}(x_0, y_0, z_0) + (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z) &= (x, y, z) \\ (x_0 + \lambda v_x, y_0 + \lambda v_y, z_0 + \lambda v_z) &= (x, y, z)\end{aligned}$$

y como dos vectores son iguales, por definición, sólo si lo son componente a componente, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, que se denominan *ecuaciones paramétricas* (por el parámetro λ):

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}$$

Ecuación continua

Si despejamos el parámetro en las anteriores ecuaciones e igualamos, se obtiene la *ecuación continua*:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{v_x} = \lambda \\ \frac{y - y_0}{v_y} = \lambda \\ \frac{z - z_0}{v_z} = \lambda \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}}$$

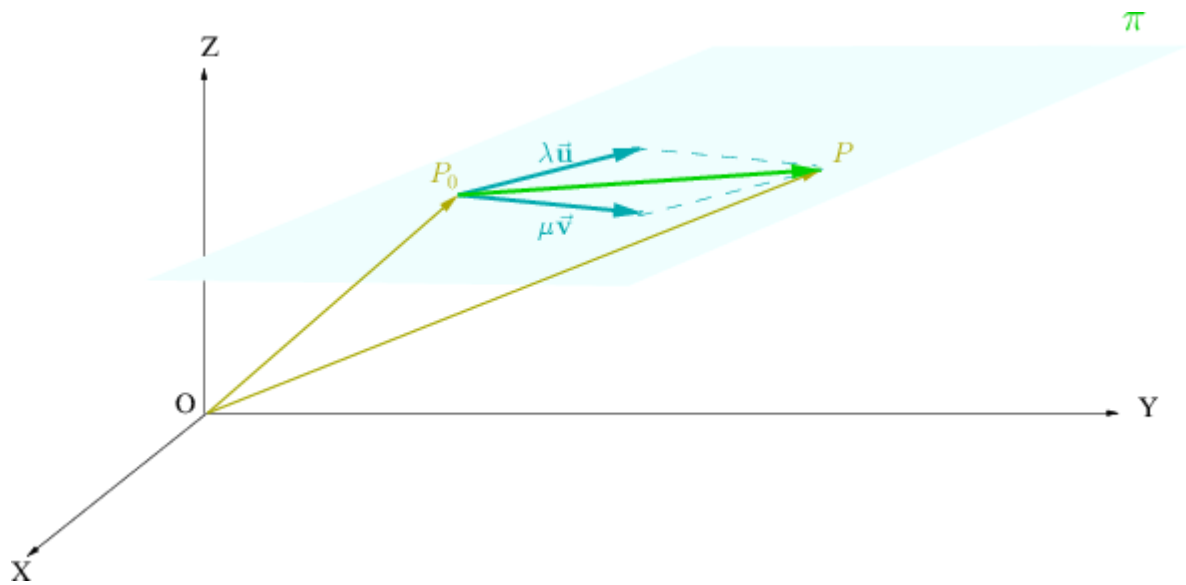
Ecuaciones implícitas o intersección de dos planos

Si de la anterior ecuación sacamos dos igualdades y operamos, se llega a la *ecuaciones implícitas*:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \\ \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x - x_0) \cdot v_y = (y - y_0) \cdot v_x \\ (y - y_0) \cdot v_z = (z - z_0) \cdot v_y \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x v_y - y v_x = x_0 v_y - y_0 v_x \\ y v_z - z v_y = y_0 v_z - z_0 v_y \end{cases}}$$

Aunque no se va a ver ahora, cada una de las dos ecuaciones implícitas que se han obtenido, determinan un plano en el espacio, por lo que el sistema anterior de dos ecuaciones está expresando la recta como la intersección de dos planos (la intersección, para el sistema de ecuaciones es el conjunto de puntos que verifica ambas a la vez; es decir, el conjunto de puntos que está a la vez en los dos planos. De la misma manera, podemos imaginarnos la esquina entre dos paredes como su intersección).

Siguiendo con este camino, desde la ecuación vectorial a las demás, no sólo podemos obtener las ecuaciones de la recta en el plano y en el espacio, sino también, por ejemplo, las ecuaciones del plano en el espacio. Véase la siguiente figura.



http://212.170.234.76/wikiEducared/index.php?title=Ecuaciones_del_plano



Apéndice

Despejar en ecuaciones de otros tipos

En el apartado [Operaciones con ecuaciones](#) se ha descrito un proceso general para despejar, que luego se ha utilizado para razonar en el apartado [Operaciones en desigualdades](#). Vamos a ver la generalidad de la forma de pensar del proceso con algunos otros tipos de ecuaciones.

Ecuación radical

Una *ecuación radical* es una ecuación numérica en la que la incógnita está, como su nombre indica, dentro de una raíz. La operación que se va a aplicar para «sacar» la incógnita de la raíz es su operación inversa, la potenciación.

Sea la ecuación

$$\sqrt[n]{x} = b$$

donde ya están cancelados los términos independientes; para quitar la raíz se elevan ambos miembros al exponente adecuado, lo que da lugar a una nueva igualdad:

$$(\sqrt[n]{x})^n = b^n$$

Pero como la potenciación es la operación inversa de la radicación, ambas desaparecen del miembro de la izquierda:

$$x = b^n$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación potencial

Una *ecuación potencial* es una ecuación numérica en la que la incógnita está, como su nombre indica, en una potencia (en la base). La operación que se va a aplicar para «sacar» la incógnita de la potencia es su operación inversa, la radicación.

Sea la ecuación

$$x^n = b$$

donde ya están cancelados los términos independientes; para quitar el exponente se toman raíces en ambos miembros al exponente adecuado, lo que da lugar a una nueva igualdad:

$$\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{b}$$

Pero como la radicación es la operación inversa de la potenciación, ambas desaparecen del miembro de la izquierda:

$$x = \sqrt[n]{b}$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación exponencial

Una *ecuación exponencial* es una ecuación numérica en la que la incógnita está, como su nombre indica, en el exponente. La operación que se va a aplicar para «bajar» la incógnita del exponente es su operación inversa, el logaritmo.

Sea la ecuación

$$a^x = b$$

donde ya están cancelados los términos independientes y $b > 0$; para quitar la a de la base, se toma el logaritmo en base a de ambos miembros de la igualdad, lo que da lugar a una nueva igualdad:

$$\log_a(a^x) = \log_a(b)$$

Pero como la función logaritmo es la inversa a la exponencial, ambas desaparecen del miembro de la izquierda:

$$x = \log_a(b)$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación logarítmica

En una *ecuación logarítmica* la incógnita está dentro de un logaritmo, y se aplica la potenciación como operación inversa al logaritmo.

Sea la ecuación

$$\log_a(x) = b$$

donde ya están cancelados los términos independientes; como los dos miembros son iguales, al utilizarlos como exponentes en sendas potencias tiene que seguir cumpliéndose su igualdad:

$$a^{\log_a(x)} = a^b$$

$$x = a^b$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación matricial

Una *ecuación matricial* es una relación entre matrices, en vez de entre números, como era el caso en las ecuaciones numéricas. Despejar la incógnita, que ahora es una matriz, se hace razonando como se describió al despejar en el apartado [Operaciones con ecuaciones](#). Conceptualmente conviene resaltar que ahora se están utilizando las operaciones de suma y producto de matrices, que tienen su definición propia en el conjunto de matrices (como la suma y el producto tienen su definición en el conjunto de los números). Además, como pasaba con los números, en rigor podríamos decir que la resta «no existe»: lo que existen son la suma y los elementos opuestos, y la resta no es más que la suma de un elemento opuesto. O, equivalentemente, también se puede decir que la resta existe, pero que se define como la suma de elementos opuestos.

Sea la ecuación

$$AX + B = 0$$

cancelamos o compensamos el término independiente (el que no contiene a la incógnita) restando la matriz B a ambos lados (en realidad, sumando la matriz opuesta de B a ambos lados), lo que tiene que dar lugar a otra igualdad:

$$AX + B - B = -B$$

$$AX = -B$$

Y ahora, para quitar la A que multiplica, multiplicamos por delante a ambos miembros de la igualdad. El producto de matrices no es conmutativo, así que es importante tratar exactamente igual a ambos miembros de la igualdad: no se puede multiplicar a uno con una matriz por delante y al otro por detrás. La matriz por la que multiplicamos es el *elemento opuesto* de la matriz A respecto del producto de matrices.

$$A^{-1}AX = A^{-1}(-B)$$

$$X = -A^{-1}B$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación integral

Una *ecuación integral* involucra, como su nombre indica, integrales de funciones. La integración es una de las posibles operaciones que se aplica sobre las funciones, y su operación inversa es la derivación. En estas ecuaciones la incógnita es una función entera, no un simple número o un conjunto de números ordenados en una matriz. Como se ha indicado para las matrices, cuando se trabaja con el conjunto de funciones, hay definidas ciertas operaciones propias de este tipo de datos: suma de funciones, producto de funciones, derivación de funciones, integración de funciones, etcétera. Y se puede decir que la resta de funciones no es más que la suma de funciones opuestas.

Sea la ecuación

$$\int x(t) dt + a(t) = b(t) + c$$
$$\int x(t) dt + a(t) - a(t) = b(t) - a(t) + c$$

como los dos miembros son iguales, al derivarlos tiene que seguir cumpliéndose una igualdad:

$$\frac{d}{dt} \int x(t) dt = \frac{d}{dt} [b(t) - a(t) + c]$$

Y como la derivación y la integración son operaciones opuestas,

$$x(t) = \frac{d}{dt} b(t) - \frac{d}{dt} a(t) + \frac{d}{dt} c$$

$$x(t) = \frac{db(t)}{dt} - \frac{da(t)}{dt} + 0$$

$$x(t) = b'(t) - a'(t)$$

Y ya está despejada la incógnita.

Ecuación diferencial

Una *ecuación diferencial* involucra, como su nombre indica, derivadas de funciones. La derivación es una de las posibles operaciones que se aplica sobre las funciones, y su operación inversa es la integración. Como antes, la incógnita es una función entera.

Sea la ecuación

$$\frac{d}{dt} x(t) = a(t) + b,$$

donde si había alguna función en el miembro de la izquierda la hemos cancelado como antes –y ahora está dentro de a(t)–, como los dos miembros son iguales, al integrarlos (y añadir una constante cada vez que se resuelve una integral, pues la derivada de una constante es cero y no sabemos si había una constante antes...) tiene que seguir cumpliéndose una igualdad:

$$\int \frac{d}{dt} x(t) dt = \int a(t) + b dt$$

$$x(t) = \int a(t) dt + \int b dt + c_1$$

$$x(t) = \int a(t) dt + bt + c_1 + c_2$$

Y ya está despejada la incógnita.



Enlaces

Algunos enlaces que también tratan estas matemáticas son:

Operaciones con fracciones

<http://www.aplicaciones.info/decimales/fraccion.htm>

<http://www.sapiensman.com/matematicas/matematicas8.htm>

<http://ingenieria.uaslp.mx/Recursos/Formularios/Fracciones.doc>

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/fracciones/

Operaciones con potencias

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Descartes/3_eso/Potencias/Potencias32.htm

<http://www.vadenumeros.es/tercero/operaciones-con-potencias.htm>

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Potencias/#obje

Operaciones con raíces

http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Descartes/3_eso/Potencias/Potencias33.htm

http://www.monlau.es/btecnologico/mates/realytrigo/op_ra.htm

Operaciones en desigualdades

<http://www.epler.umich.mx/salvadors/matematicas2/contenidos/desigualdades.html>

Ejes cartesianos

<http://carmesimatematic.webcindario.com/geometriaanalitica.htm>

Ecuaciones de la recta

<http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/4.4.html>

<http://www.emathematics.net/es/erectaplano.php?a=5>

<http://es.wikipedia.org/wiki/Recta>

Enlaces generales

<http://www.ematematicas.net/>

<http://descartes.cnice.mec.es/>

http://descartes.cnice.mec.es/indice_ud.php

<http://www.sectormatematica.cl/contenidos.htm>

<http://www.matematicasbachiller.com/>

En inglés

Encyclopaedia of Mathematics, edited by Michiel Hazewinkel

<http://eom.springer.de/>

Math archives

<http://archives.math.utk.edu/>



Errare humanum est

Es propio del hombre equivocarse



Universidad Carlos III de Madrid

└ Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas

└ Departamento de Estadística: C/ Madrid 126 28903 Getafe (Madrid)

└ David Casado de Lucas: <http://www.est.uc3m.es/dcasado/>

Fechas de creación y última actualización: 02/12/08, 16/12/08