Todos los números

Los números son la «materia prima» básica de las Matemáticas. El Vocabulario científico y técnico, de la Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales, lo define así:

> **número**. Resultado abstracto de un proceso de contar o medir. Este primer concepto de número, para el que se definen las operaciones aritméticas fundamentales, sufre [o disfruta] sucesivas extensiones (número entero, real, etc.), que buscan dar validez a esas operaciones en los nuevos conjuntos de números así creados. || Constante que figura en la expresión de determinadas leyes o propiedades.

En estas hojas se ve muy brevemente quiénes y cómo son los números (se definen informalmente mediante ejemplos) y cómo se relacionan entre sí:

Números naturales

$\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3,...}

Números enteros

$\mathbb{Z}$ = {0, 1, -1, 2, -2,...}

Números racionales

$\mathbb{Q}$ = {1/1, -1/2, 2/1, -3/1, 2/2, 1/3, 10356/437,...}

Números irracionales

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \{ \pi, \sqrt{2}, e, \ldots \}$

Números reales

$\mathbb{R}$ = {3, -4/8, -1024, π, ... }

Números complejos

$\mathbb{C}$ = { a + ib | con a y b números reales e i un número tal que $i^2=-1$ }

Cuaternios

Aunque no se suele hablar de ellos (por su poca utilidad, como se indica más abajo), existe otro grupo de números: los *cuaternios*. También se encuentran los nombres *cuaterniones*, *números cuaternios* y *números cuaterniones*; sin embargo, la que se utiliza aquí es la que se aconseja en *Vocabulario científico y técnico*, de la Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales. Se construyen añadiendo a los números reales no una parte imaginaria, como en el caso de los números complejos, sino tres; después se definen –no se hace aquí– adecuadamente las operaciones de suma y producto entre ellos.

$\boldsymbol{K}^4$ = { a + ib + jc + kd | con a, b, c y d números reales e i, j y k números tales que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, y además $i\,j = -j\,i = k$, $j\,k = -k\,j = i$ y $k\,i = -i\,k = j$ }

Las relaciones de inclusión entre todos los anteriores tipos de números son: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (porque $\mathbb{R} = \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \mathbb{Q}$), $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y, tomando algunos coeficientes nulos en la definición de cuaternios, $\mathbb{R} \subset \boldsymbol{K}^4$ y $\mathbb{C} \subset \boldsymbol{K}^4$.

Estos números surgieron en un intento de generalizar los números complejos en la misma dirección de ideas y propiedades –mismas estructuras y propiedades matemáticas– que los anteriores conjuntos de números. El Teorema de Frobenius demuestra la inutilidad de este intento: las únicas extensiones posibles de los números reales son los números complejos y los cuaternios.

Teorema (Frobenius)

Sea **L** un cuerpo algebraico que contiene como subcuerpo al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Supongamos que cada elemento de **L** conmuta, respecto a la multiplicación, con los elementos de $\mathbb{R}$, y que todo elemento x de **L** tiene la forma

$$x = x^0 + x^1 i_1 + \cdots + x^n i_n \qquad (14)$$

donde $x^0, x^1, \ldots, x^n$ son números reales que constituyen las coordenadas de la magnitud x de modo que x es un vector con $(n+1)$ dimensiones. De esta manera, se está suponiendo que las magnitudes $1, i_1, \ldots, i_n$ forman una base del espacio vectorial **L**. Para definir la multiplicación en **L** es suficiente formular las reglas de multiplicación de las magnitudes $i_1, \ldots, i_n$, de tal manera que todo producto $i_r i_s$ tenga la forma (14). Resulta, entonces, que o bien **L** coincide con el campo $\mathbb{R}$, es decir, es isomorfo al campo de los números reales, o bien es isomorfo al campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, o bien es isomorfo al cuerpo $\boldsymbol{K}^4$ de los cuaternios.

Hubo que renunciar a la propiedad conmutativa: el resultado de multiplicar dos números es independiente del orden en que se operen en el conjunto de los números complejos pero no es así en el de los cuaternios. Se diría algebraicamente que los complejos tiene estructura de *anillo conmutativo* o *cuerpo*, mientras que los cuaternios verifican sólo las propiedades de *anillo* (estos nombres cambian según la definición que se les dé, y algunos autores, como el del libro que se menciona al final, hablan respectivamente de *cuerpo conmutativo* o *campo* y *cuerpo* [¡nótese la importancia de tener claro qué definición se está utilizando!]). En cualquier caso, esta renuncia a la conmutatividad tiene como consecuencia que no se pueda construir un análisis matemático basado en los cuaternios, cosa que sí sucede con los números complejos, lo que provee a éstos de gran utilidad. Por el contrario, entre las limitadas aplicaciones de los cuaternios está la de describir bien las rotaciones en los espacios euclídeos de tres y cuatro dimensiones.

Por último, del mismo modo que los números reales y los complejos constituyen espacios vectoriales euclídeos de dimensiones uno y dos, respectivamente, los cuaternios forman un espacio vectorial euclídeo de dimensión cuatro. Toda la información anterior referida a los cuaternios está tomada del libro que se menciona en las referencias; terminemos con palabras de su autor:

Los números reales y los complejos surgieron en las matemáticas como resultado del largo desarrollo del concepto de número, debido principalmente a necesidades prácticas y, *en cierta medida, como resultado de la lógica del desarrollo de la propia matemática.*

[...]

Dado que los números reales y complejos aparecieron en las matemáticas como resultado de una determinada vía de desarrollo, que pudo haber sido otra, surge una pregunta lógica: ¿no conduciría esta otra vía de desarrollo al surgimiento de otros números, análogos a los reales y los complejos, pero aun así, otros números? Para responder a esta pregunta es necesario formular de manera precisa las condiciones que se deben imponer a los entes que pudieran desempeñar el papel de números, y establecer si existen otros sistemas de entes que satisfagan estas mismas condiciones. No es difícil llegar a la conclusión de que todo sistema de entes que satisfaga las condiciones impuestas a los números debe ser un cuerpo topológico. Si al cuerpo se [le] *imponen exigencias adicionales de compacidad local y conexidad, lo cual es natural, entonces tiene lugar el siguiente teorema demostrado por mí en el año 1931*:

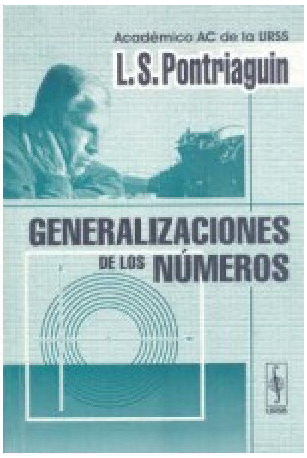
Teorema (Pontriaguin)

Todo cuerpo topológico conexo localmente compacto es o bien el campo de los números reales, o bien el campo de los números complejos, o bien el cuerpo de los cuaternios.

Este teorema afirma, en particular, que los números reales y complejos no son un producto casual del desarrollo histórico, sino que surgieron en las matemáticas por necesidad, como los únicos entes que pueden desempeñar el papel de números.

Referencias

Generalizaciones de los números
Liev Semiónovich Pontriaguin
Moscú: Editorial URSS, 2005



Universidad Carlos III de Madrid
∟ Facultad de Ciencias Sociales y Jurídicas
∟ Departamento de Estadística: C/ Madrid 126 28903 Getafe (Madrid)
∟ David Casado de Lucas: http://www.est.uc3m.es/dcasado/

21/10/08