Variaciones sobre un ejercicio de Teoría de la Probabilidad

Obertura

En el título se utiliza el sustantivo «variaciones» con su significado artístico (musical, en este caso), no con el significado del concepto homónimo que existe en la Combinatoria (aunque las Matemáticas tengan su parte de arte). Por tanto, este uso de «variaciones» que se hace en el texto existe en Matemáticas, pero no para nominar a las distintas versiones o modificaciones de un ejercicio; se utiliza aquí sólo en sentido informal y metafórico. Estas *variaciones* forman un esquema de ejercicios sencillos de Teoría de la Probabilidad, con los que vamos a ir estudiando cómo depende la solución de los detalles del enunciado. El ejercicio en el que está basado el esquema (Tema original) pertenece al libro *Problemas de cálculo de probabilidades y estadística*, de Vicente Novo Sanjurjo, que está editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Es cierto que hay ejercicios más bonitos y sublimes; pero el objetivo principal debe ser siempre que el alumno aprenda, y este ejercicio es idóneo para que alumnos que estudian probabilidad básica pongan en práctica sus conocimientos o aprendan comparando unas soluciones con otras. La dificultad de los ejercicios (si asociamos la intensidad de sonido con la dificultad matemática) es *mezzo piano*, pero es el lector quien debe elegir la velocidad que le resulte más cómoda para «interpretar» estas variaciones: quizá *andante* o *andantino*...

Al leer el enunciado de un ejercicio de probabilidad, hay unas preguntas básicas que conviene hacerse: ¿cuál es el experimento que hay detrás?, ¿cuáles son los posibles resultados (espacio muestral)?, ¿cuál es el suceso de interés y qué características tiene? y ¿cuál es la variable aleatoria más sencilla (no es única, como se verá) que se puede asociar al experimento? En este documento se va variando ligeramente el enunciado de un mismo ejercicio, de forma que vaya cambiando la forma de solucionarlo. La explicación de estos cambios se da al final, cuando el alumno o lector haya intentado resolver («tocar») todos los ejercicios. Ahora únicamente se informa de cuáles son las condiciones que van a ir cambiando, para que se le preste especial atención.

La situación de los ejercicios es que se van a elegir al azar piezas recién fabricadas en una industria y se va a comprobar si son defectuosas o no. Del experimento se van a variar el lugar sobre el que se va a realizar el experimento, que puede ser una *cadena de producción* «infinita» de piezas o un *lote* de piezas ya agrupadas; y, cuando el lugar es un lote, se va a variar también lo que se hace con una pieza después de comprobar si es defectuosa o no, que puede ser *reemplazo* o *no reemplazo* de la pieza al lugar del que se extrajo. En una cadena da igual lo que se haga con la pieza después de la comprobación: siempre se tomarán otras nuevas. Respecto al suceso de interés, va a poder ser que *la cuarta pieza analizada es la primera defectuosa* o que *entre las cuatro primeras piezas analizadas hay sólo una defectuosa*.

Una *variable aleatoria* es, matemáticamente, una función que asigna números a los sucesos del espacio muestral del experimento (con asignárselos a los *sucesos elementales* es suficiente, puesto que los *sucesos compuestos* se pueden descomponer en elementales):

$$\begin{array}{ccc}
\Omega & \rightarrow X \rightarrow & \mathbb{R} \\
\{\text{defectuosa}\} & \rightarrow & \{X=1\} \\
\{\text{no defectuosa}\} & \rightarrow & \{X=0\} \\
N_1 & \rightarrow & \{X_1 = 0\} \\
S_3 & \rightarrow & \{X_3 = 1\} \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

La Teoría de la Probabilidad, una rama de las Matemáticas, haciendo uso de la Teoría de la Medida, otra rama, utiliza en Ω una estructura de conjuntos adecuada que permite trabajar con uniones e intersecciones de estos conjuntos, y además calcular las medidas (probabilidades, en este caso) de todos los posibles resultados. Esta estructura se llama técnicamente *σ-álgebra*. Es decir, al final se forma el trío (en términos musicales)

(Ω, A, P), llamado *espacio de probabilidad* (un *espacio de medida* donde la medida es una probabilidad) con:

- Ω ≡ *Espacio muestral del experimento*
- A ≡ *σ-álgebra de sucesos asociados al experimento*
- P ≡ *Probabilidad*

La variable aleatoria *X*, por ser por definición una *función medible* hace –*induce*– en $\mathbb{R}$ una copia «exacta» de toda esta estructura.

$(\mathbb{R}, B, P_X)$, otro *espacio de probabilidad*, donde:

- $\mathbb{R}$ ≡ *Conjunto de los números reales*
- B ≡ *σ-álgebra de Borel en* $\mathbb{R}$ $(\{X(a) / a \in A\})$
- P_X ≡ *Probabilidad inducida por X* $\left(P_X(b) := P(X^{-1}(b))\right)$

Ahora, más exactamente,

$$(\Omega, A, P) \quad \rightarrow X \rightarrow \quad (\mathbb{R}, B, P_X)$$

Todo lo anterior que hace que en ocasiones podamos estudiar los sucesos del experimento en Ω sin pasar a $\mathbb{R}$ o, si nos conviene, estudiar sus sucesos correspondientes en $\mathbb{R}$. Cada suceso de la estructura de Ω tiene, a través de *X*, un suceso asignado en la estructura de $\mathbb{R}$. Por otro lado, como las definiciones, propiedades y resultados de la Probabilidad son válidos para toda estructura de espacio probabilístico, lo serán tanto en Ω como en $\mathbb{R}$. Es decir, la definición de *independencia de sucesos* o el *Teorema de la probabilidad total*, por ejemplo, tiene una «copia» exacta en cada uno de los dos espacios de medida.

Esto explica también por qué, en general, algunos ejercicios de los apuntes y libros se enuncian pensando sólo en trabajar sobre las propiedades de los espacios de probabilidad mientras que otros sólo requieren utilizar distribuciones de variables aleatorias. Nótese la diferencia entre la variable aleatoria *X* y su *distribución de probabilidad* P_X.

Estos ejercicios son sencillos y se podrían resolver sin utilizar variables aleatorias, sin pasar a $\mathbb{R}$ y su estructura; pero se han incluido las operaciones en los dos espacios, para que se vea bien la equivalencia (frecuentemente no explicar esta dualidad es causa de mucha confusión). En los cálculos se utilizará además P para la probabilidad del primer espacio y P_X para la del segundo. En los cálculos con esta segunda, en vez de utilizar la expresión conjuntista general $P_X(b) := P(X^{-1}(b))$ se utilizarán ya las fórmulas que el lector debe conocer de las distribuciones de probabilidad de Bernoulli y binomial.

Por otro lado, es conveniente advertir al lector de algunas operaciones, consecuencia de las características de los sucesos, que se van a aplicar frecuente e implícitamente en los pasos de las soluciones (escribir todos los detalles haría los desarrollos muy largos). Siempre se cumple que:

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|B\cap A)\cdot P(D|C\cap B\cap A).$$

Si los sucesos son independientes, se cumple además que

$$P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|B\cap A)\cdot P(D|C\cap B\cap A)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D),$$

es decir, da igual condicionar o no unas variables a otras. Con la notación que se utilizará (por comodidad) se debe entender:

$$P(A,B,C,D):=P(A\cap B\cap C\cap D).$$

A veces se indicará la posición en el vector (es decir, el orden temporal de los sucesos) con un subíndice en la letra que representa a los sucesos. Estas operaciones anteriores son válidas y se utilizarán tanto cuando las letras A, B, C y D representen cuatro sucesos de la estructura del espacio muestral Ω como cuando representen cuatro sucesos de la estructura en $\mathbb{R}$.

Quien necesite o desee repasar algunos conceptos de Probabilidad, puede consultar

«Comentarios de Teoría de la Probabilidad»

http://www.Casado-D.org/edu/ComentTeoriaProbabilidad.pdf

Variación 1

En una cadena de producción, se sabe que en promedio uno de cada veinte productos manufacturados es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer un control el cuarto producto seleccionado sea el primero defectuoso?

Al decir «cadena de producción» parece que uno se imagina que van viniendo piezas, que esas piezas son independientes y que el experimento de mirar si es defectuosa o no lleva asociada una situación dicotómica, con lo cual la información de que cada veinte piezas suele haber en media una defectuosa se interpreta como el valor del parámetro p. Pero nosotros sólo miramos cuatro piezas (de las «infinitas») de la cadena, porque nos preguntan sólo por un suceso que involucra las cuatro primeras observaciones.

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no. Es equivalente considerar que el experimento está compuesto de las cuatro observaciones a considerar un proceso compuesto de cuatro subexperimentos, lo importante es ser consecuente con la elección la definir el espacio muestral y resolver el ejercicio entero; no se insistirá en esta equivalencia en el resto de este documento.

Espacio muestral: Si denotamos por N el que una pieza observada no sea defectuosa y S el que sí lo sea, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de todas las posibles combinaciones de estas dos letras en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). En total hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: La única combinación de letras que cumple que la cuarta pieza observada sea la primera defectuosa es $\{(N, N, N, S)\}$. Vemos que la posición en el vector va a indicar el orden de extracción.

Cálculos: Antes de ponerse a hacer operaciones es necesario pensar en las características de los sucesos: ¿pertenece al espacio muestral o está formado por varios de sus sucesos?, ¿es unión o intersección de sucesos más sencillos, compatibles o independientes entre sí? En esta variación, cada observación es independiente de las demás, por lo que no necesitamos condicionar (o, como se quiera ver, si lo hacemos se obtiene lo mismo por lo comentado en Obertura). Las probabilidades no cambian con el resultado de las extracciones y los sucesos son independientes. Así, si ponemos un subíndice para indicar el orden de la observación:

$$P(N,N,N,S)=P(N_1\cap N_2\cap N_3\cap S_4)$$
$$= P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)\cdot P(N_3|N_2\cap N_1)\cdot P(S_4|N_3\cap N_2\cap N_1)$$
$$= P(N_1)\cdot P(N_2)\cdot P(N_3)\cdot P(S_4)$$
$$= \frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

La solución anterior utilizaba sólo sucesos. Una solución equivalente, pero que no simplifica nada, se obtiene si pensamos en cuatro variables aleatorias de Bernoulli de parámetro $p_i=1/20$. En este caso se tendría que escribir:

Experimento: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no.

Espacio muestral: Si denotamos por $\{X=0\}$ el que una pieza observada no sea defectuosa y $\{X=1\}$ el que sí lo sea, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de todas las posibles combinaciones de estos dos números en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). En total hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: La única combinación de números que cumple que la cuarta pieza observada sea la primera defectuosa es $\{(0, 0, 0, 1)\}$.

Cálculos:

$$P_X(0,0,0,1)=P_X(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=1\})$$
$$= \cdots = \frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Solución utilizando una variable aleatoria binomial

Una tercera forma de resolver este ejercicio, dado que hay reemplazo y cada extracción parte de la misma situación inicial, consiste en pensar en una variable aleatoria binomial de parámetros 4 y 1/20. Pero como esta variable no tiene en cuenta las posiciones en que ocurren los sucesos, habrá que utilizar un ardid.

Experimento: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no.

Espacio muestral: Si definimos la variable X como el número de piezas defectuosas, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$, $\{X=3\}$ y $\{X=4\}$.

Suceso de interés: Ahora hay que tener cuidado, porque no nos interesa un suceso que esté directamente en el espacio muestral, sino la intersección del suceso $\{X=1\}$ con que la pieza defectuosa aparezca en la cuarta posición. Como la pieza defectuosa tiene que aparecer en alguna de las cuatro posiciones, se utilizará el *Teorema de la probabilidad total* en los cálculos. Por otro lado, cualquier posición es equiprobable para una distribución binomial. Denotemos la posición por P.

Cálculos:

$$\begin{aligned} P_X(X=1) &= P_X(X=1\cap P=1)+P_X(X=1\cap P=2)+P_X(X=1\cap P=3)+P_X(X=1\cap P=4) \\ &= 4\cdot P_X(X=1\cap P=4) \end{aligned}$$

De donde

$$P_X(X=1\cap P=4)=\frac{1}{4}\cdot P_X(X=1)=\frac{1}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Una cuarta forma de solución se incluye en Otras interpretaciones.

Variación 2

En una cadena de producción, se sabe que en promedio uno de cada veinte productos manufacturados es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer un control de cuatro productos haya exactamente uno defectuoso?

Ahora el experimento no ha cambiado; tampoco *p;* pero sí el suceso de interés. Habría que tener en cuenta todas las posibles formas de ordenar la posición de la pieza defectuosa, pues cada ordenación es ahora un suceso elemental incluido en el suceso compuesto en que estamos interesados.

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de las letras *N* y *S* en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). Hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: Cualquier combinación que incluya una *S* y tres *N*; vemos que hay cuatro posiciones en las que colocar la S: {(*S*, *N*, *N*, *N*), (*N*, *S*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *S*, *N*), (*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Cálculos: Tenemos, pues, un suceso compuesto por cuatro sucesos elementales incompatibles del espacio muestral. Dado que son pocos casos, se puede hacer; los indicamos con detalle en este caso:

$$
\begin{aligned}
&P\{(S,N,N,N)\cup(N,S,N,N)\cup(N,N,S,N)\cup(N,N,N,S)\}\\
&\quad = P\{(S,N,N,N)\}+P\{(N,S,N,N)\}+P\{(N,N,S,N)\}+P\{(N,N,N,S)\}\\
&\quad = P(S_1\cap N_2\cap N_3\cap N_4)+P(N_1\cap S_2\cap N_3\cap N_4)\\
&\qquad + P(N_1\cap N_2\cap S_3\cap N_4)+P(N_1\cap N_2\cap N_3\cap S_4)\\
&\quad = \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\\
&\quad = 4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.
\end{aligned}
$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

Experimento: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de los números 0 y 1 en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). Hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: Cualquier combinación que incluya un 1 y tres 0; vemos que hay cuatro posiciones en las que colocar el 1: {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}.

Cálculos: Tenemos, pues, un suceso compuesto por cuatro sucesos elementales del espacio muestral. Como antes, se pueden hacer directamente los cálculos; los indicamos con detalle en este caso:

$$
\begin{aligned}
&P_X\{(1,0,0,0)\cup(0,1,0,0)\cup(0,0,1,0)\cup(0,0,0,1)\}\\
&\quad = P_X(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\})\\
&\qquad + P_X(\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\})\\
&\qquad + P_X(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=1\}\cap\{X_4=0\})\\
&\qquad + P_X(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=1\})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}$$

$$= 4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Solución utilizando una variable aleatoria binomial

Como en la variación anterior, se puede asociar a este experimento una variable aleatoria binomial de parámetros 4 y 1/20. Pero ahora no hay que preocuparse de la posición de la piedra defectuosa, ya tiene esto en cuenta la distribución binomial.

<u>Experimento</u>: Extraer al azar cuatro piezas de la cadena de producción y anotar si son defectuosas o no.

<u>Espacio muestral</u>: Si definimos la variable X como el número de piezas defectuosas, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$, $\{X=3\}$ y $\{X=4\}$.

<u>Suceso de interés</u>: El suceso de interés es sencillamente $\{X=1\}$, que está en el espacio muestral.

<u>Cálculos</u>:

Como $X \sim B\left(n=4, p=\frac{1}{20}\right)$, entonces

$$P_X(X=1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1=4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Al comparar este ejercicio con el anterior se ve claramente la diferencia entre hallar la probabilidad de un suceso con un orden único y fijo, y la de un suceso en el que hay que tener en cuenta todas las posibles combinaciones, cosa que ya hace automáticamente la distribución binomial. Por eso aparece el factor combinatorio $\binom{4}{1}$ que no había antes.

Variación 3

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y con reemplazo, el cuarto producto seleccionado sea el defectuoso?

Se trata de analizar un lote de veinte piezas, en el que sabemos seguro que hay una defectuosa y del que hacemos cuatro extracciones con reemplazo. Queremos ver la probabilidad de que haya sucedido que la defectuosa salga en cuarto lugar. Como hay reemplazo las extracciones no varían las probabilidades, y la probabilidad de que extraigamos la defectuosa es siempre $p_i = 1/20$. Es importante el hecho de que sabemos seguro que hay una defectuosa, esto es lo que determina las probabilidades condicionadas: «si no ha salido la defectuosa, debe estar aún en el lote»...

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de las letras *N* y *S* en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). En total hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral. Nótese que ahora, a diferencia de una cadena de producción, donde siempre vienen piezas que pueden ser o no defectuosas, ahora puede haber varias *S* en estos vectores porque hay reemplazo.

Suceso de interés: {(*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Cálculos:

$$P(N,N,N,S)=P(N_1\cap N_2\cap N_3\cap S_4)$$
$$= P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)\cdot P(N_3|N_2\cap N_1)\cdot P(S_4|N_3\cap N_2\cap N_1)$$
$$= \frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de los números 0 y 1 en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). En total hay $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: {(0, 0, 0, 1)}.

Cálculos:

$$P_X(0,0,0,1)=\cdots=\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Solución utilizando una variable aleatoria binomial

Ahora cambia la descripción del suceso y poco más, pero como razonamos e hicimos para la variación 1:

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Si definimos la variable X como el número de piezas defectuosas, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$, $\{X=3\}$ y $\{X=4\}$.

Suceso de interés: Ahora hay que tener cuidado, porque no nos interesa un suceso que esté directamente en el espacio muestral, sino la intersección del suceso $\{X=1\}$ con que la pieza defectuosa aparezca en la cuarta posición. Como la pieza defectuosa tiene que aparecer en alguna de las cuatro posiciones, se utilizará el *Teorema de la probabilidad total* en los cálculos. Por otro lado, cualquier posición es equiprobable para una distribución binomial. Denotemos la posición por P.

Cálculos:

$$P_X(X=1)=P_X(X=1\cap P=1)+P_X(X=1\cap P=2)+P_X(X=1\cap P=3)+P_X(X=1\cap P=4)$$
$$= 4\cdot P_X(X=1\cap P=4)$$

De donde

$$P_X(X=1\cap P=4)=\frac{1}{4}\cdot P_X(X=1)=\frac{1}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1=\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Se incluye otra forma de solucionar el ejercicio en Otras interpretaciones.

Variación 4

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo los productos de uno en uno y con reemplazo, de cuatro productos haya sólo uno defectuoso?

Como hay reemplazo las extracciones no varían las probabilidades, y la probabilidad de que extraigamos la defectuosa es siempre 1/20.

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de las letras N y S en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). Hay $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: Cualquier combinación que incluya una S y tres N; vemos que hay cuatro posiciones en las que colocar la S: {(*S*, *N*, *N*, *N*), (*N*, *S*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *S*, *N*), (*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Cálculos: Tenemos, pues, un suceso compuesto por cuatro sucesos elementales incompatibles del espacio muestral. Dado que son pocos casos, se puede hacer:

$$\begin{aligned}
&P\{(S,N,N,N)\cup(N,S,N,N)\cup(N,N,S,N)\cup(N,N,N,S)\}\\
&= P\{(S,N,N,N)\}+P\{(N,S,N,N)\}+P\{(N,N,S,N)\}+P\{(N,N,N,S)\}\\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\\
&= 4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.
\end{aligned}$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de los números 0 y 1 en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,). Hay $2\cdot2\cdot2\cdot2=2^4=16$ elementos en el espacio muestral.

Suceso de interés: Cualquier combinación que incluya un 1 y tres 0; vemos que hay cuatro posiciones en las que colocar el 1: {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}.

Cálculos: Tenemos, pues, un suceso compuesto por cuatro sucesos elementales del espacio muestral. Como antes, se pueden hacer directamente los cálculos:

$$\begin{aligned}
&P_X\{(1,0,0,0)\cup(0,1,0,0)\cup(0,0,1,0)\cup(0,0,0,1)\}\\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\cdot\frac{19}{20}+\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{20}\\
&= 4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.
\end{aligned}$$

Solución utilizando una variable aleatoria binomial

Como en la variación anterior, se puede asociar a este experimento una variable aleatoria binomial de parámetros 4 y 1/20. Pero ahora no hay que preocuparse de la posición de la piedra defectuosa, ya tiene esto en cuenta la distribución binomial.

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y devolverlas al lote.

Espacio muestral: Si definimos la variable X como el número de piezas defectuosas, el espacio muestral tras las cuatro observaciones se compone de $\{X=0\}$, $\{X=1\}$, $\{X=2\}$, $\{X=3\}$ y $\{X=4\}$.

Suceso de interés: El suceso de interés es sencillamente $\{X=1\}$, que está en el espacio muestral.

Cálculos:

Como $X \sim B\left(n=4, p=\dfrac{1}{20}\right)$, entonces

$$P_X(X=1)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1=4\cdot\left(\frac{19}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^1.$$

Se incluye otra forma de solucionar el ejercicio en Otras interpretaciones.

Variación 5

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. *¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y sin* reemplazo, el cuarto producto seleccionado sea el defectuoso*?*

En este caso, como no habría reemplazo y las extracciones varían las probabilidades, hay que condicionar.

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y mantenerlas fuera del lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de las letras *N* y *S* en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,), de manera que haya una *S* o ninguna, dependiendo de si sale la pieza defectuosa o no. El espacio muestral se compone ahora, al no haber reemplazo, de los siguientes cinco elementos: {(*N*, *N*, *N*, *N*), (*S*, *N*, *N*, *N*), (*N*, *S*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *S*, *N*), (*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Suceso de interés: {(*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Cálculos:

$$\begin{aligned}P(N,N,N,S)&=P(N_1\cap N_2\cap N_3\cap S_4)\\&=P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)\cdot P(N_3|N_2\cap N_1)\cdot P(S_4|N_3\cap N_2\cap N_1)\\&=\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17}=\frac{\cancel{19}}{20}\cdot\frac{\cancel{18}}{\cancel{19}}\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{18}}\cdot\frac{1}{\cancel{17}}=\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y mantenerlas fuera del lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de los números 0 y 1 en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,), de manera que haya un 1 o ninguno, dependiendo de si sale la pieza defectuosa o no. El espacio muestral se compone ahora, al no haber reemplazo, de los siguientes cinco elementos: {(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}.

Suceso de interés: {(0, 0, 0, 1)}.

Cálculos:

Podemos imaginar que cada extracción está determinada por lo que haya pasado antes, es decir, por el valor de las variables o extracciones anteriores:

$$
\begin{aligned}
P_X(0,0,0,1) &= P_X(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=1\}) \\
&= P_X(\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\qquad\cdot\ P_X(\{X_4=1\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&= \frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17}=\frac{\cancel{19}}{20}\cdot\frac{\cancel{18}}{\cancel{19}}\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{18}}\cdot\frac{1}{\cancel{17}}=\frac{1}{20}.
\end{aligned}
$$

Nótese que en esta variación (y lo mismo sucederá en la siguiente), al no tratarse de una cadena de producción ni haber reemplazo, la situación inicial no se restituye después de cada extracción-reposición, lo que hace que no se pueda definir una variable con distribución binomial como se definía en las anteriores variaciones.

Se incluye otra forma de solucionar el ejercicio en Otras interpretaciones.

Variación 6

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y sin reemplazo, de cuatro productos haya uno defectuoso?

Como no hay reemplazo, también cambian las probabilidades con las extracciones.

Solución sin utilizar variables aleatorias

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y mantenerlas fuera del lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de las letras *N* y *S* en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,), de manera que haya una *S* o ninguna, dependiendo de si sale la pieza defectuosa o no. El espacio muestral se compone ahora, al no haber reemplazo, de los siguientes cinco elementos: {(*N*, *N*, *N*, *N*), (*S*, *N*, *N*, *N*), (*N*, *S*, *N*, *N*), (*N*, *N*, *S*, *N*), (*N*, *N*, *N*, *S*)}.

Suceso de interés: {(S, N, N, N), (N, S, N, N), (N, N, S, N), (N, N, N, S)}.

Cálculos: Se tiene que, por ser incompatibles los cuatro sucesos elementales de que consta el suceso compuesto que nos interesa:

$$
\begin{aligned}
&P\{(S,N,N,N)\cup(N,S,N,N)\cup(N,N,S,N)\cup(N,N,N,S)\}\\
&= P\{(S,N,N,N)\}+P\{(N,S,N,N)\}+P\{(N,N,S,N)\}+P\{(N,N,N,S)\}\\
&= P(S_1)\cdot P(N_2|S_1)\cdot P(N_3|N_2\cap S_1)\cdot P(N_4|N_3\cap N_2\cap S_1)\\
&\quad + P(N_1)\cdot P(S_2|N_1)\cdot P(N_3|S_2\cap N_1)\cdot P(N_4|N_3\cap S_2\cap N_1)\\
&\quad + P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)\cdot P(S_3|N_2\cap N_1)\cdot P(N_4|S_3\cap N_2\cap N_1)\\
&\quad + P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)\cdot P(N_3|N_2\cap N_1)\cdot P(S_4|N_3\cap N_2\cap N_1)\\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{19}\cdot\frac{18}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{18}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17}\\
&= \frac{1}{20}\cdot1\cdot1\cdot1+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot1\cdot1+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot1+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17}\\
&= \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=4\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Solución utilizando variables aleatorias de Bernoulli

Experimento: Extraer al azar, y de una en una, cuatro piezas de un lote de veinte, anotar si son defectuosas o no y mantenerlas fuera del lote.

Espacio muestral: Todas las posibles combinaciones de los números 0 y 1 en las cuatro posiciones de un vector: (, , ,), de manera que haya un 1 o ninguno, dependiendo de si sale la pieza defectuosa o no. El espacio muestral se compone ahora, al no haber reemplazo, de los siguientes cinco elementos: {(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}.

Suceso de interés: {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)}.

Cálculos: Haciendo los cálculos con mucho detalle

$$
\begin{aligned}
&P_X\{(1,0,0,0)\cup(0,1,0,0)\cup(0,0,1,0)\cup(0,0,0,1)\}\\
&\quad = P_X\big(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\}\\
&\qquad \cup\ \{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \cup \ \{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=1\}\cap\{X_4=0\} \\
&\quad \cup \ \{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=1\}\big) \\
&= P_X\big(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\}\big) \\
&\quad + P_X\big(\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=0\}\big) \\
&\quad + P_X\big(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=1\}\cap\{X_4=0\}\big) \\
&\quad + P_X\big(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}\cap\{X_4=1\}\big) \\
&= P_X(\{X_1=1\})\cdot P_X(\{X_2=0\}|\{X_1=1\})\cdot P_X(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\}) \\
&\qquad\qquad \cdot\ P_X(\{X_4=0\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=1\}) \\
&\quad + P_X(\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_2=1\}|\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_3=0\}|\{X_2=1\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\qquad\qquad \cdot\ P_X(\{X_4=0\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\quad + P_X(\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_3=1\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\qquad\qquad \cdot\ P_X(\{X_4=1\}|\{X_3=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\quad + P_X(\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_2=0\}|\{X_1=0\})\cdot P_X(\{X_3=0\}|\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&\qquad\qquad \cdot\ P_X(\{X_4=1\}|\{X_3=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\}) \\
&= \frac{1}{20}\cdot\frac{19}{19}\cdot\frac{18}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot\frac{18}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{17}{17}+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17} \\
&= \frac{1}{20}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}\cdot 1\cdot 1+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}\cdot 1+\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{17} \\
&= \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=4\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

Nótese en este ejercicio cómo en cada caso una vez que se extrae la pieza defectuosa, como no hay reemplazo, la probabilidad de obtener una no defectuosa se hace 1. Por otra parte, dado que el suceso de interés incluye cuatro de los cinco elementos del espacio muestral, es más cómodo calcular esta probabilidad como:

$$
\begin{aligned}
&P\{(S,N,N,N)\cup(N,S,N,N)\cup(N,N,S,N)\cup(N,N,N,S)\} \\
&\quad = 1-P\{(N,N,N,N)\}=1-\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{16}{17}=1-\frac{16}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

y lo mismo se puede decir para la notación con variables de Bernoulli. Sin embargo, se han hecho también los cálculos de la otra forma porque aporta algo de luz en la comprensión del ejercicio.

Se incluye otra forma de solucionar el ejercicio en Otras interpretaciones.

Explicación de las variaciones

Para dejar más claro el porqué de cada variación y cómo se han ordenado, se aclara aquí con los valores *cadena* o *lote*, *con reemplazo* o *sin reemplazo* y *con interés en la posición* de la pieza defectuosa o *sin interés en la posición*.

Variación 1: Cadena, con interés en la posición

Variación 2: Cadena, sin interés en la posición

Variación 3: Lote, con reemplazo, con interés en la posición

Variación 4: Lote, con reemplazo, sin interés en la posición

Variación 5: Lote, sin reemplazo, con interés en la posición

Variación 6: Lote, sin reemplazo, sin interés en la posición

Algunos comentarios

Conviene hacer algunos comentarios sobre algunos detalles de los ejercicios:

- Cada extracción y observación de una pieza es una situación dicotómica a la que puede asociársele una variable aleatoria con distribución de Bernoulli. Esta asociación no facilita los cálculos, y en estos ejercicios sencillos no supone más que un cambio de notación. Por otro lado, las variables binomiales sí facilitan algo la descripción de los ejercicios y los cálculos, pero se ha visto que en algunas de las variaciones estas variables no se podían utilizar. Respecto al parámetro de las variables de Bernoulli, se puede observar que había dos formas de determinarlo:
  - En el caso de la cadena, no dicen que en media hay un ejemplar defectuoso de cada veinte, lo que significa que si hiciésemos lotes de veinte productos, por término medio habría una pieza defectuosa en cada uno; pero algunos podrían no tener ninguna pieza defectuosa y otros más de una. Por otro lado, no nos están insinuando que imaginemos lotes de ningún tamaño, sino que nos informan de que la probabilidad de que cada producto sea defectuoso es 1/20. Esta probabilidad es la misma para cada extracción. Es importante no interpretar en este caso el veinte de ninguna otra forma.
  - En el caso de los lotes, una información en media no nos diría nada nuevo, puesto que estaríamos en una situación como la del punto anterior: ¿qué más da de qué tamaño sean los lotes mientras sea mayor o igual a cuatro, si sólo vamos a extraer cuatro y todos tienen $p = 1/20$? Nótese que para una distribución de Bernoulli $\boldsymbol{E}(X)=P(X=1)=p$. En el caso de los lotes se dice que hay exactamente uno defectuoso en cada lote de veinte (esta situación es poco realista, porque es raro que se produzcan errores de forma tan determinista como para asegurar que hay uno en cada veinte, aunque tiene interés teórico). Esta información, por la *regla de Laplace*, permite determinar p como el cociente de los casos favorables entre los posibles; y este valor es 1/20 al principio, pero sólo se mantiene se hay reemplazo, porque sin él cambia el número de piezas de cada tipo en el lote dependiendo de lo que haya salido en las extracciones anteriores y, en consecuencia, cambia también el número de casos favorables o posibles.

Esta sutileza, el origen del valor de *p*, es junto con la definición del experimento lo único que diferencia algunas versiones de los ejercicios entre sí, puesto que luego se resuelven igual, por ejemplo: las versiones 1 y 3 y las versiones 2 y 4.

- Como se ha mencionado, en el caso de la cadena no tendría sentido plantearse el reemplazo o no de la pieza a la cadena, porque se supone que siempre vamos a tomar piezas nuevas de la cadena.
- Cuando hay reemplazo (en los lotes), como la situación vuelve a ser la misma tras reponer la pieza, las variables son independientes entre sí y da igual condicionar o no cada una por las anteriores. Esto permitía tanto que pudiesen aparecer varias piezas defectuosas como utilizar la distribución binomial. Sin embargo, cuando no hay reemplazo, hay que tener en cuenta que la situación del lote no vuelve a ser la misma: esto se hace condicionando, lo que se traduce en que se «actualizan» las probabilidades (los parámetros, si estamos pensando en que cada extracción es una variable aleatoria de Bernoulli).
- Como se ha mencionado, hay situaciones que no son muy realistas: ¿qué sentido tiene restituir la pieza defectuosa al lote después de encontrada? Pero se trataba de utilizar el ejercicio para aprender.
- Se puede apreciar cómo los resultados, cuando no se fija la posición de la pieza defectuosa, son un número cuatro veces mayor, porque éstas son las posibles posiciones donde ubicarla.

Otras interpretaciones

Algunos de los ejercicios anteriores pueden resolverse de un modo distinto, sea inmediato o teniendo que hacer *florituras*.

Variación 1 bis

En una cadena de producción, se sabe que en promedio uno de cada veinte productos manufacturados es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer un control el cuarto producto seleccionado sea el primero defectuoso?

Este experimento está relacionado con la *distribución geométrica*, por lo que se puede resolver directamente definiendo una variable aleatoria que siga esta distribución. De esta manera se resuelve el ejercicio original en el libro del que lo he extraído.

Las variaciones 3, 4, 5 y 6 admiten otro modo de solución relativamente sencillo, basado en la *regla de Laplace* y algo de Combinatoria. Sabemos que, en general, cuando no todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ser elegidos, no se puede aplicar la regla de Laplace (número de casos favorables al suceso de interés dividido por el número de casos totales [o elementos del espacio muestral]).

En algunos de los ejercicios vistos sucedía que los casos favorables, por ejemplo $\{(S, N, N, N), (N, S, N, N), (N, N, S, N), (N, N, N, S)\}$, tenían todos entre sí la misma probabilidad; pero hay que tener cuidado, porque esta probabilidad puede no ser la misma que la de otros elementos del espacio muestral, por ejemplo $\{(S, S, N, N)\}$, ya que no llevan a S o a N el mismo número de piezas. Así que no se puede aplicar la regla de Laplace.

No obstante, si pensamos en las piezas mismas del lote, independientemente de si son defectuosos o no, cada subgrupo de cuatro productos del lote sí tiene la misma probabilidad de ser elegido. Vamos a imaginar ficticiamente que llevan un número que identifica a cada una; es decir, que ahora podemos distinguir unas piezas no defectuosas de otras («unas N de otras») por ese número. Esto hace que si contamos bien los casos favorables a nuestro suceso de interés y los casos posibles, podamos utilizar la regla de Laplace. Y para contar bien tenemos que utilizar la Combinatoria. Es decir, la clave para resolver estas variaciones utilizando la regla de Laplace es que cada cuarteto de letras no es equiprobable mientras que sí lo es cada cuarteto de números. En esta nueva situación, cambia la descripción del experimento y el espacio muestral.

<u>Espacio muestral para las variaciones 3 y 4</u>: Todas los posibles vectores de longitud cuatro, (, , ,), formados con números del 1 al 20, posiblemente repetidos, donde la posición en el vector indica el orden de la extracción. El tamaño del espacio muestral, es decir, el número de casos posibles, se puede calcular de la siguiente forma: dado que hay cuatro posiciones, podemos colocar en la primera cualquiera de los 20 números; como se reemplaza, para la segunda podemos elegir de nuevo 20 elementos; y así hasta la cuarta. Tenemos que:

$$Cp=20\cdot 20\cdot 20\cdot 20=20^4.$$

Variación 3 bis

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y con reemplazo, el cuarto producto seleccionado sea el defectuoso?

<u>Suceso de interés</u>: Como nos interesa el suceso *la cuarta pieza extraída es la (primera) defectuosa*, es decir, $\{(N, N, N, S)\}$, tenemos que los casos favorables se calculan como sigue: como en la cuarta posición tiene que ir la S, no hay libertad en ese sentido; tenemos que pensar en rellenar las otras tres posiciones con los 19 números restantes; razonando como antes, tenemos que

$$Cf=19\cdot 19\cdot 19=19^3.$$

De esta forma, utilizando la regla de Laplace se tiene que:

$$P(N,N,N,S)=\frac{Cf}{Cp}=\frac{19^3}{20^4}.$$

Variación 4 bis

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y con reemplazo, de cuatro producto haya sólo uno defectuoso?

<u>Suceso de interés</u>: Como ahora, a diferencia de en la variación 3, nos interesa el suceso *entre las cuatro analizadas hay exactamente una defectuosa*, hay que tener en cuenta que, puesto que la *S* puede ponerse en cuatro posiciones distintas (antes estaba siempre en la cuarta posición), el número de casos favorables queda multiplicado por cuatro. Así:

$$Cf = 4 \cdot 19^3,$$

de modo que ahora

$$P\{(S,N,N,N) \cup (N,S,N,N) \cup (N,N,S,N) \cup (N,N,N,S)\} = \frac{Cf}{Cp} = \frac{4 \cdot 19^3}{20^4} = 4\frac{19^3}{20^4}.$$

<u>Espacio muestral para las variaciones 5 y 6</u>: Todas los posibles vectores de longitud cuatro, (, , ,), formados con números distintos del 1 al 20, donde de nuevo la posición en el vector indica el orden de extracción. El tamaño del espacio muestral, es decir, el número de casos posibles, se puede calcular de la siguiente forma: dado que hay cuatro posiciones, podemos colocar en la primera cualquiera de los 20 números; por cada una de estas posibilidades, podemos colocar en la segunda posición cualquiera de los 19 números restantes; en la tercera podemos elegir entre 18; y entre 17 en la cuarta posición. Así, tenemos que

$$Cp = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17.$$

Variación 5 bis

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y sin reemplazo, el cuarto producto seleccionado sea el defectuoso?

<u>Suceso de interés</u>: Como nos interesa el suceso *la cuarta pieza extraída es la (primera) defectuosa*, es decir, {(*N*, *N*, *N*, *S*)}, tenemos que los casos favorables se calculan como sigue: como en la cuarta posición tiene que ir la *S*, no hay libertad en ese sentido; tenemos que pensar en rellenar las otras tres posiciones con los 19 números restantes; razonando como antes, tenemos que

$$Cf = 19 \cdot 18 \cdot 17.$$

De esta forma, utilizando la regla de Laplace se tiene que:

$$P(N,N,N,S) = \frac{Cf}{Cp} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{1}{20}.$$

Variación 6 bis

Se tienen lotes de veinte productos, de los que se sabe que en cada lote uno es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al analizar uno de estos lotes, extrayendo las piezas de una en una y sin reemplazo, de cuatro productos haya sólo uno defectuoso?

<u>Suceso de interés</u>: Como ahora, a diferencia de en la variación 5, nos interesa el suceso *entre las cuatro analizadas hay exactamente una defectuosa*, hay que tener en cuenta que, puesto que la *S* puede ponerse en cuatro posiciones distintas (antes estaba siempre en la cuarta posición), el número de casos favorables queda multiplicado por cuatro. Así:

$$Cf=4\cdot(19\cdot 18\cdot 17),$$

de modo que ahora

$$P\{(S,N,N,N)\cup(N,S,N,N)\cup(N,N,S,N)\cup(N,N,N,S)\}$$
$$=\frac{Cf}{Cp}=\frac{4\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

Más variaciones

Una condición que podría variarse (dando lugar a ejercicios con sentido) sería la de *extraer las piezas de una en una* a *extraer las cuatro a la vez*. Veamos qué pasaría en cada caso:

- En el caso de la cadena, no habría diferencias, porque siempre cogemos piezas distintas.
- En el caso del lote, extraer los cuatro a la vez implica que son piezas distintas. Esto se traduce en que esta nueva situación sólo puede ser equivalente al caso de extracciones sin reemplazo, donde no hay opción a que una pieza sea extraída dos veces.

En estos dos casos, la equivalencia entre la nueva situación y las antiguas que se comentan se ve rápidamente si por un lado imaginamos que los extraemos de uno en uno y sólo comprobamos si son defectuosos o no al final, todos a la vez, y por otro imaginamos que se hace con todos ambas cosas, extraer y mirar, al final.

Otras formas de generalización triviales son cambiar el número de elementos analizados de cuatro a otra cantidad, o cambiar el valor de la probabilidad de que un elemento sea defectuoso. Son generalizaciones que el lector puede hacer por sí mismo sin mucha dificultad, aunque no aportan nada nuevo conceptualmente.

Tema original

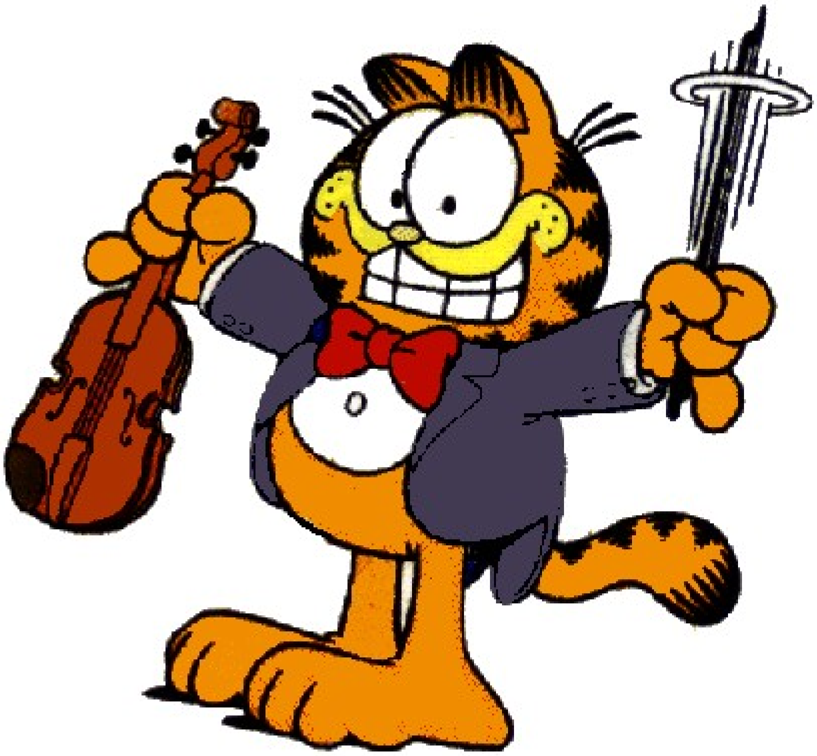
El enunciado del ejercicio original es:

En una cadena de producción, se sabe que en promedio uno de cada 20 productos manufacturados es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que al hacer un control, el cuarto producto seleccionado sea el primero defectuoso?

Problemas de cálculo de probabilidad y estadística
Vicente Novo Sanjurjo
UNED, 1993

Final

Por último, estimado alumno (o lector), espero que estas variaciones no te hayan sonado *quasi comme un inferno*. Si has llegado leyendo hasta aquí y has comprendido e «interpretado» bien estas variaciones, es quizá muy probable (nunca mejor dicho) que apruebes la asignatura... y... además... ¡eres un artista!



Propina

Para quien todavía quede en la sala (sin estar dormido) y tenga interés en unos conceptos muy elementales de Combinatoria:

«Combinatoria elemental»

http://www.Casado-D.org/edu/CombinatoriaElemental.pdf

Universidad Complutense de Madrid
∟ Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
∟ Departamento de Estadística e Investigación Operativa II
∟ David Casado de Lucas

15 de febrero del 2012